

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Радослав Д. Радуловић

**ГЛОБАЛНИ МИНИМУМ ВРЕМЕНА КРЕТАЊА
МЕХАНИЧКИХ СИСТЕМА СА ОГРАНИЧЕНИМ
УПРАВЉАЊИМА И РЕАКЦИЈАМА ВЕЗА**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Београд, 2017

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Radoslav D. Radulović

**GLOBAL MINIMUM TIME FOR THE MOTION OF
MECHANICAL SYSTEMS
WITH LIMITED CONTROLS AND CONSTRAINT
REACTIONS**

DOCTORAL DISSERTATION

Belgrade, 2017

Комисија за преглед, оцену и одбрану докторске дисертације

Ментори:

др Драгомир Зековић, редовни професор,
Машински факултет Универзитета у Београду
др Александар Обрадовић, редовни професор,
Машински факултет Универзитета у Београду

Чланови комисије:

др Никола Младеновић, редовни професор,
Машински факултет Универзитета у Београду
др Зоран Стокић, ванредни професор,
Машински факултет Универзитета у Београду
др Славиша Шалинић, ванредни професор,
Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву,
Универзитет у Крагујевцу

Датум одбране:

Изјаве захвалности

Аутор изражава неизмерну захвалност својим менторима проф. др Драгомиру Зековићу и проф. др Александру Обрадовићу на изузетној стручној помоћи, неизмерном стрпљењу и несебичној моралној подршци коју су му током свих ових година пружили.

Аутор користи ову прилику да се најтоплије захвали проф. др Оливери Јеремић и проф. др Милану Дражићу на стручној помоћи и корисним саветима.

Такође, посебну захвалност аутор изражава проф. др Јосифу Вуковићу (1940–2014) и проф. др Николи Младеновићу на великој личној подршци, неограниченом поверењу и стручној помоћи.

Ова докторска дисертација урађена је у оквиру пројекта ОИ 174001 „Динамика хибридних система сложених структура. Механика материјала” чији је руководилац проф. др Катица Стевановић Хедрих.

У Београду, 2017. године

Аутор

ГЛОБАЛНИ МИНИМУМ ВРЕМЕНА КРЕТАЊА МЕХАНИЧКИХ СИСТЕМА СА ОГРАНИЧЕНИМ УПРАВЉАЊИМА И РЕАКЦИЈАМА ВЕЗА

Резиме

Предмет истраживања ове докторске дисертације је формирање нових аналитичко–нумеричких поступака у циљу одређивања глобалног минимума времена кретања како материјалне тачке, тако и холономних и нехолономних механичких система константне и променљиве масе, са ограниченим управљањима и ограниченим реакцијама веза у општем случају. Посебна пажња у дисертацији биће посвећена одређивању диференцијалних једначина кретања нехолономних механичких система у конфигурационом простору V_m , а затим, водећи рачуна о чињеници да се само оно време које је присутно у једначинама реономних веза и на оним местима где се јавља као последица замене зависних координата помоћу тих веза, може разматрати као допунска координата, изведене су диференцијалне једначине кретања нехолономних механичких система у проширеном конфигурационом простору V_{m+1} . Формулисани проблеми оптимизације решени су у оквиру теорије оптималног управљања, користећи Понтрјагинов принцип максимума и теорију сингуларних оптималних управљања. У поступку одређивања решења постављеног двотачкастог граничног проблема (TPBVP), неопходно је претходно одредити процену интервала вредности непознатих граничних фазних и спрегнутих координата. Имајући у виду да не постоји теорема о јединствености и егзистенцији решења постављеног TPBVP, природно се намећу следећа питања која ће бити разматрана у оквиру ове докторске дисертације: да ли постоји решење постављеног TPBVP, да ли је могуће, у општем случају, одредити процену интервала вредности свих непознатих граничних фазних и спрегнутих координата, као и да ли се може одредити општи нумерички поступак за одређивање свих могући решења TPBVP? Затим, биће разматрани различити, већ постојећи, нумерички алгоритми (shooting method, Nelder Mead method, genetic algorithm, differential evolution, simulated

annealing, random search, C-GRASP algorithm) у циљу изналажења оптималних вредности параметара који утичу на тачност и брзину конвергенције решења уз дату упоредну анализу решења нумеричких алгоритама за глобалну оптимизацију. Такође, урађене су и одређене модификације постојећих, односно развој нових, у циљу добијања што поузданијег нумеричког алгорита за глобалну оптимизацију имајући у виду предности и мане већ постојећих нумеричких алгоритама. У досадашњој литератури и публикованим научним радовима нису разматрана постављена питања коју су од суштинског значаја при одређивању глобалног минимума времена кретања како материјалне тачке, тако и холономних и нехолономних механичких система. Одговори на постављена питања, дати у овој докторској дисертацији, представљају крајњи циљ истраживања, а самим тим и научне доприносе успешном реализацијом истих.

Кључне речи: проширени конфигурациони простор, једначине кретања, материјална тачка, механички системи, TPBVP, глобални минимум времена, брахистохрони проблем, изопериметријски проблем, оптимално управљање, сингуларно оптимално управљање, реализација кретања, реакције веза, управљачке силе, нумеричке методе глобалне оптимизације, Mathematica, MatLab

Научна област: Машинство

Ужа научна област: Механика

УДК број: 531.8:531.33
621.01

GLOBAL MINIMUM TIME FOR THE MOTION OF MECHANICAL SYSTEMS WITH LIMITED CONTROLS AND CONSTRAINT REACTIONS

Abstract

The research topic of this doctoral thesis is the establishment of new analytical-numerical procedures to determine the global minimum time for the motion of both the particle and the variable and invariable-mass holonomic and nonholonomic mechanical systems, with limited controls and limited reactions of constraints in a general case. Special attention is directed to determining differential equations of motion of nonholonomic mechanical systems in the configuration space V_m and, thereafter, taking into account the fact that only the time which is present in the rheonomic constraints and at the locations where it occurs as a consequence of the substitution of dependent coordinates by the help of these constraints, can be considered as a supplementary coordinate, differential equations of motion of nonholonomic mechanical systems V_{m+1} in the extended configuration space V_{m+1} are derived. The formulated optimization problems are solved within the framework of the optimal control theory, using Pontryagin's maximum principle and the singular optimal control theory. In the procedure of seeking a solution to a set up two-point boundary value problem (TPBVP), it is needed first to estimate the interval of values of unknown boundary phase and conjugate coordinates. Taking into account that there is not a theorem on the uniqueness and existence of the solution to a set up TPBVP, it is reasonable that some questions are imposed to be considered in this doctoral thesis: Is there a solution to TPBVP, is it possible, in a general case, to estimate the interval of values of all unknown boundary phase and conjugate coordinates, and is it possible to determine a general numerical procedure for determining all potential solutions of TPBVP? Thereafter, considerations involve different, already existing, numerical algorithms (shooting method, Nelder Mead method, genetic algorithm, differential evolution, simulated annealing, random search, C-GRASP algorithm) in order to find optimum values of parameters that affect the accuracy

and rate of the convergence of solution, along with given comparative analysis of the solutions to numerical algorithms for global optimization. Also, certain modifications are carried out of the existing, i.e. development of new ones, in order to obtain as reliable numerical algorithm as possible for global optimization, keeping in mind advantages and disadvantages of the existing numerical algorithms. In the current literature and published scientific papers the questions posed have not been considered and they are of fundamental importance when determining the global minimum time for the motion of both particle and holonomic and nonholonomic mechanical systems. The responses to posed questions, given in this doctoral thesis, represent the ultimate objective of the research, and thereby a scientific contribution to its successful accomplishment.

Key words: extended configuration space, equations of motion, particle, mechanical systems, TPBVP, global minimum time, brachistochrone problem, isoperimetric problem, optimal control, singular optimal control, realization of motion, reactions of constraints, control forces, numerical methods for global optimization, Mathematica, MatLab

Scientific discipline: Mechanical engineering

Scientific subdiscipline: Mechanics

**UDC number: 531.8:531.33
621.01**

Садржај

Увод.....	1
1.1 Диференцијалне једначине кретања механичких система са линеарним нехомогеним нехолономним везама – разне форме и њихова еквивалентност... 17	
1.1.1 Уводна разматрања.....	17
1.1.2 Мацијеје једначине.....	28
1.1.3 Волтерине једначине.....	28
1.1.4 Вороњчеве једначине.....	30
1.1.5 Чаплигинове једначине.....	33
1.1.6 Генералисане Волтерине једначине.....	34
1.1.7 Ферерсове једначине.....	36
1.1.8 Болцман–Хамелове једначине.....	36
1.1.9 Апелове једначине.....	39
1.1.10 Лагранжеве једначине друге врсте са неодређеним множителјима.....	42
1.2 Диференцијалне једначине кретања реономних механичких система са линеарним нехомогеним нехолономним везама – разне форме и њихова еквивалентност..... 43	
1.2.1 Уводна разматрања.....	43
1.2.2 Волтерине једначине.....	54
1.2.3 Вороњчеве једначине.....	54
1.2.4 Чаплигинове једначине.....	54
1.2.5 Генералисане Волтерине једначине.....	55
1.2.6 Ферерсове једначине.....	55
1.2.7 Болцман–Хамелове једначине.....	55
1.2.8 Апелове једначине.....	56
1.2.9 Лагранжеве једначине друге врсте са неодређеним множителјима.....	57
1.3 Примери..... 57	
1.3.1 Нехолономни механички систем променљиве масе са управним брзинама... 57	

1.3.2 Чаплигинове саонице	66
1.3.3 Упрошћен модел возила	69
Литература	75
2 Глобални минимум времена при брахистохроном кретању материјалне тачке са ограниченом реакцијом везе	79
2.1 Формулација проблема оптималног управљања	79
2.2 Решење проблема оптималног управљања за случај неограничене реакције везе	83
2.3 Решење проблема оптималног управљања за случај ограничене реакције везе	95
Литература	109
3 Глобални минимум времена при брахистохроном кретању материјалне тачке у произвољном потенцијалном пољу сила	115
3.1 Формулација проблема оптималног управљања	115
3.2 Решење проблема оптималног управљања	116
3.3 Одређивање интервала вредности непознатих координата спрегнутог вектора у почетном тренутку	119
3.4 Нумерички пример	122
4 Глобални минимум времена при брахистохроном кретању холономног механичког система	128
4.1 Формулација и решење проблема оптималног управљања.....	128
4.2 Одређивање интервала вредности непознатих координата спрегнутог вектора у почетном тренутку	132
4.3 Нумерички пример 1	135
4.4 Нумерички пример 2	155
Литература	168
5 Глобални минимум времена при брахистохроном кретању нехолономног механичког система	171
5.1 Формулација и решење проблема оптималног управљања.....	171
5.2 Нумерички пример 1	176
5.2.1 Случај $\varphi_f = \pi / 2$	180

5.2.2	Случај $\varphi_f = \pi / 30$	184
5.2.3	Случај $\varphi_f = 0$	191
5.2.4	Случај $\varphi_f = \pi$	195
5.3	Нумерички пример 2	198
5.3.1	Анализа брахистохроног кретања система за граничне случајеве почетног положаја материјалне тачке B	207
5.3.1.1	Случај $V_B(t_0) = 0$	207
5.3.1.2	Случај $V_B(t_0) = \sqrt{2E_0 / m}$	209
5.3.1.3	Случај $V_B(t_0) = -\sqrt{2E_0 / m}$	210
	Литература	215
6	Глобални минимум времена при брахистохроном кретању нехолономног механичког система са ограниченим управљањима.....	217
6.1	Формулација проблема	217
6.2	Брахистохрони проблем као задатак оптималног управљања	221
6.3	Нумерички пример 1	230
6.3.1	Решење проблема оптималног управљања за случај ограничених управљачких сила.....	238
6.4	Нумерички пример 2	249
6.4.1	Случај $\varphi_f = \pi / 2$	260
6.4.2	Случај $\varphi_f = \pi / 30$	266
6.4.3	Случај $\varphi_f = 0$	269
6.4.4	Случај $\varphi_f = \pi$	271
6.5	Решење проблема оптималног управљања за случај ограничених реакција нехолономних веза	272
6.5.1	Случај $\varphi_f = \pi / 2$	277
6.5.2	Случај $\varphi_f = \pi$	282

Литература	288
7 Брахистохроно кретање нехолономног механичког система Чаплигиновог типа као изопериметријски проблем.....	292
7.1 Формулација и решење проблема оптималног управљања.....	292
7.2 Пример 1	302
7.3 Пример 2.....	304
Литература	307
Закључци.....	308
Прилози	313
Прилог А.....	313
Прилог Б	319
Биографија.....	326
Изјава о ауторству	
Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада	
Изјава о коришћењу	

Увод

У последње три деценије значајно се променило схватање улоге рачунара у науци, од спорих, компликованих и тешко доступних машина, до савремених рачунара и нумеричких алгоритама који све више мењају устаљени начин нашег размишљања. Многи напуштени и тешко решиви проблеми појавили су се у потпуно новом светлу, о чему сведочи и ова докторска дисертација.

Главни циљ ове докторске дисертације састоји се у одређивању глобалног минимума времена кретања како материјалне тачке, тако и холономних и нехолономних механичких система константне и променљиве масе, са ограниченим управљањима и ограниченим реакцијама веза у општем случају.

Формулисани проблеми оптимизације решени су у оквиру теорије оптималног управљања, користећи Понтрјагинов (руски: *Лев Семёнович Понтрягин*, енглески: *Lev Semyonovich Pontryagin, 1908-1988*) принцип максимума и теорију сингуларних оптималних управљања. У основи теорије оптималног управљања је Понтрјагинов принцип максимума, који даје потребне услове оптималности за широку класу проблема програмског управљања. Теорија оптималног управљања представља надоградњу класичног варијационог рачуна, и даје могућност проширења примене на решавање нових, сложенијих задатака¹ наметнутих развојем савремене технике. Како је класичан брахистохрони проблем, кога је формулисао Јохан Бернули (*Johann Bernoulli, 1667-1748*) 1696. године у часопису *Acta Eruditorum* под насловом „*Problema novum, ad cuius Solutionem Mathematici invitantur. Datis in plano verticali duobus punctis A et B. Assignare mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B*”, био „камен темељац” за настанак и развој варијационог рачуна, природно је да и савремена теорија оптималног управљања, чији се настанак везује за 1956. годину када је Понтрјагин формулисао

¹ Посебно оних проблема оптимизације са диференцијалним везама.

принцип максимума, има своју потпуну примену у решавању проблема оптимизације механичких система. Имајући у виду важност класичног брахистохроног проблема за развој не само варијационог рачуна, већ и математике и механике генерално², у овој докторској дисертацији посебна пажња биће посвећена управо брахистохроним проблемима.

Многи разматрани проблеми у овој докторској дисертацији указују на постојање сингуларних управљања за које се потребни услови принципа максимума дегенеришу на облик из којег није могуће експлицитно одредити екстремална управљања. Имајући у виду да су услови принципа максимума неефективни за одређивање оптималних сингуларних управљања, неопходно је такође указати на допунске услове оптималности (Келијеве услове и услове спрезања) за сингуларна управљања.

У том смислу, докторска дисертација је подељена на седам поглавља.

У **првом поглављу** најпре су изведене диференцијалне једначине кретања механичког система променљиве масе у коваријантном облику, чије кретање ограничавају како холономне, тако и нехолономне механичке везе, за које се узима да су линеарне, стационарне и нехомогене. Затим, аутор доказује потпуну еквивалентност изведене форме са следећим, добро познатим, формама диференцијалних једначина кретања:

- Мацијевим (*G. A. Maggi*) једначинама;
- Волтериним (*V. Volterra*) једначинама;
- Вороњчевим (*P.V. Voronets*) једначинама;
- Чаплигиновим (руски: *Сергѐй Алексѐевич Чаплыгин*, енглески: *Sergey Alexeyevich Chaplygin, 1869-1942*) једначинама;

² Теоријске основе варијационог рачуна поставили су Ојлер (*Leonhard Euler, 1707-1783*) и Лагранж (*Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813*) у XVIII веку. Доприносе варијационом рачуну дали су и бројни врсни математичари, током XVIII и XIX века, као што су: Лежандре (*Adrien-Marie Legendre, 1752-1833*), Јакаби (*Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804-1851*), Хамилтон (*Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865*), Вајерштрас (*Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815-1897*), Хилберт (*David Hilbert, 1862-1943*) и многи други. Хилберт је чак варијационом рачуну посветио један од својих знаменитих проблема. У 23. Хилбертовом проблему позивају се математичари да развијају методе варијационог рачуна.

- Генералисаним Волтериним једначинама;
- Ферерсовим (*H. M. Ферперс*) једначинама;
- Болцман–Хамеловим (*Ludwig Eduard Boltzmann, 1844-1906; Georg Karl Wilhelm Hamel, 1877-1954*) једначинама;
- Апеловим (*Paul Appell, 1855-1930*) једначинама;
- Лагранжевим једначинама друге врсте са неодређеним множителјима;

Овде је битно напоменути да литература у којој се разматрају нехолономни механички системи променљиве масе је веома оскудна. Детаљан преглед релевантне литературе у оквиру које су разматрани холономни механички системи променљиве масе, са различитих аспеката, дат је у [*Obradović, Šalinić, Jeremić, 2014; Cvetićanin, 1998; Cvetićanin, 2016; Irschik, Belyaev, 2014*]. Диференцијалне једначине кретања механичког система константне масе у коваријантном и контраваријантном облику, чије кретање ограничавају нехолономне хомогене везе, приказане су у дисертацији [*Čović, 1976*]³(*Вукман Човић, 1943-2011*). Преглед релевантне литературе у оквиру које су разматрани нехолономни механички системи, са различитих аспеката, дат је у [*Soltakhanov, Yushkov, Zegzhda, 2009; Neimark, Fufaev, 1967; Bloch, 2003; Kovačić, 2002*]. Детаљна анализа решења проблема материјалне реализације нелинеарних нехолономних веза дата је у раду [*Zeković, 2011.a*]. У раду [*Zeković, 2011.b*] изведен је најопштији тип диференцијалних једначина⁴ кретања механичког система са нелинеарним нехолономним везама, док се у раду [*Zeković, 2013*] анализира кретање нехолономног механичког система који се састоји од две материјалне тачке којима су наметнута различита нелинеарна ограничења у виду паралених брзина, брзина које су једнаке по интензитету, као и управних брзина. У раду [*Zeković, 2011.c*] разматра се кретање нелинеарног нехолономног механичког система у нерезонантном случају, који се састоји од две материјалне тачке, које су везане лаким механизмом типа „вила”, којима је наметнуто ограничење у виду управности брзина посредством Чаплигинових сечива. У раду [*Zeković, 2015*] анализирају се енергетске релације за

³ Такође, приказане су и претходно поменуте форме диференцијалних једначина кретања.

⁴ Овде, једначине представљају генерализацију Поенкареових (*Jules Henri Poincaré, 1854-1912*) једначина.

нехолономне механичке системе, чије кретање је ограничено нелинеарним нехолономним везама, док се у раду [Mušicki, Zeković, 2016] анализирају енергетске релације за нехолономне механичке системе, чије кретање је ограничено нехолономним везама произвољног облика и порекла. За механичке системе са линеарним везама, анализа енергетских релација урађена је у [Lurie, 2002; Teodorescu, 2009; Johnsen, 1941; Đukić, 1974; Bahar, Kwatny, 1987; Papastavridis, 1991]. У раду [Chang, Ge, 1982] изведене су Канове (Thomas R. Kane, 1924) једначине кретања за нехолономни механички систем променљиве масе, а затим су формиране једначине кретања упрошћеног модела ракетног возила. У раду [Qiao, 1990] изведене су Гибс (Josiah Willard Gibbs, 1839-1903)–Апелове једначине кретања нехолономног механичког система променљиве масе, док се у раду [Ge, 1984] разматра примена Даламбер (Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, 1717-1783)-Лагранжевог принципа. У раду [Ge, Cheng, 1983] проширен је Хамилтонов принцип за најопштији нехолономни механички систем променљиве масе. Са друге стране, у раду [Luo, Zhao, 1993] изведене су Раутове (Edward John Routh, 1831-1907) једначине кретања за механички систем променљиве масе, који се креће у неинерцијалном референтном систему, чије кретање ограничавају нелинеарне нехолономне везе. У дисертацији [Jeremić, 1998] изведене су Лагранжеве једначине друге врсте за нехолономне нестационарне механичке системе у V_{n+1} –простору, као и генералисане реакције нехолономних веза. Дисертација [Kovačić, 2002] има за циљ детаљну анализу методе поља у хронолошком низу-метода поља генералисане координате, уз проширење примене ове методе на поједине проблеме нехолономне механике и теорије нелинеарних осцилација.

У другом делу првог поглавља, полазећи од тога да су сада како холономне, тако и нехолономне механичке везе линеарне, нестационарне и нехомогене, аутор изводи диференцијалне једначине кретања механичког система променљиве масе у коваријантном и контраваријантном облику у проширеном конфигурационом простору V_{m+1} кинематски независних координата, које одговарају независним генералисаним брзинама. Проблеми динамике реономних система у основи се састоје

у налажењу таквог простора у коме диференцијалне једначине кретања разматраног механичког система, поред тога што су сагласне са геометријским концептом уоченог простора, одражавају суштину механичког система на најједноставнији начин. У проширеном конфигурационом простору m координата представља m кинематски независних координата, док је $(m + 1)$ -ва координата допунска, односно реономна координата. Разматрајући сада кретање механичког система у простору, у коме се време третира као било која друга просторна координата, створили су се услови за геометризацију реономних механичких система која је знатно сложенија у односу на геометризацију склерономних механичких система, код којих време игра улогу само независно променљиве. Главни разлог томе лежи у чињеници да величине које карактеришу ове системе, у општем случају, зависе експлицитно од времена, што има за последицу неинваријантност основних диференцијалних једначина кретања у односу на трансформације координата, које између осталог зависе и од времена, тј. у односу на групу кинематских трансформација координата [Jeremić, 1998]. Затим, изведене су Мацијеве, Волтерине, Вороњчеве, Чаплигинове, Генералисане Волтерине, Ферерсове, Болцман–Хамелове, Апелове и Лагранжеве једначине друге врсте са неодређеним множителјима у проширеном конфигурационом простору V_{m+1} .

У другом поглављу разматра се брахистохроно кретање материјалне тачке у вертикалној равни у хомогеном гравитационом пољу силе Земљине теже, како за случај неограничене, тако и случај ограничене реакције везе до фиксних граница. У овом поглављу, извршено је уопштење поменутог класичног брахистохроног проблема постављеног 1696. године од стране Јохана Бернулија⁵. Аутор брахистохрони проблем сада поставља у следећем облику: потребно је одредити облик глатке криве $y = y(x)$ која ће обезбедити да тачка, која започиње кретање из

⁵ Брахистохрони проблем заправо је први разматрао Галилео Галилеј (*Galileo Galilei, 1564-1642*) у свом раду „*Two New Sciences*” из 1638. године (*Galileo, G., TWO, pp. 97 и 212-213*). Галилејев закључак није потпуно тачан, али је свакако послужио као инспирација Јохану Бернулију да јавно изазове све математичаре света у јуну 1696. година да реше брахистохрони проблем.

произвољног положаја $M_0(x_0, y_0)$, стигне на унапред одређену многоструку облик

$$\Psi_f(x, y) = 0,$$

за најкраће време. Како бисмо боље сагледали постављени проблем, у наставку дат је детаљан приказ остварених научних резултата на овом пољу, имајући у виду притом литературу приказану на крају другог поглавља⁶.

Решење постављеног Бернулијевог проблема⁷ добили су, независно један од другог, Јохан Бернули⁸, Јакоб Бернули (*Jacob Bernoulli, 1654-1705*), Исак Њутн (*Sir Isaac Newton, 1642-1726/27*), Готфрид Вилхелм Лајбниц (*Gottfried Wilhelm (von) Leibniz, 1646-1716*), *Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (1651-1708)* и Гијом де Лопитал (*Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital, 1661-1704*). Генерализација класичног брахистохроног проблема извршена је у оквиру варијационог рачуна [*Elsogolc, 1963; Gelfand, 1964*] и теорије оптималног управљања [*Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962; Gabasov, Kirillova, 1973*]. Недавно је у [*Parnovsky, 1998*], коришћењем Фермаовог принципа, извршена генерализација брахистохроног проблема за случај нехомогеног гравитационог поља, као и за случај хомогеног гравитационог поља при постојању отпора услед сувог и вискозног трења. У радовима [*Ashby, Brittin, Love, Wyss, 1975; Gershman, Nagaev, 1976; Hayen, 2005, Šalinić, 2009; Van der Heijden, Diepstraten, 1975; Vratana, Saje, 1998; von Kleinschmidt, Schulze, 1970; Shevchenko, 1984; Shevchenko, 1986; Singh, Kumar, 1988*], коришћењем варијационог рачуна, разматран је проблем брахистохроног кретања материјалне тачке у пољу различитих врста сила, док је у [*Ivanov, 1968; Russalovskaya, Ivanov, Ivanov, 1973*] разматрано брахистохроно кретање материјалне тачке променљиве масе. У раду [*Đukić, 1976*] разматра се брахистхроно кретање материјалне тачке по глаткој површи, док се у радовима [*Čović, Vesković, 2008; Maisser, 1998*] разматра брахистхроно кретање материјалне тачке по површи при постојању отпора услед

⁶ Детаљан списак коришћене релевантне литературе дат је на крају сваког поглавља.

⁷ Решење класичног брахистохроног проблема је *циклоида*.

⁸ Јохан Бернули је решио брахистохрони проблем користећи Фермаов (*Pierre de Fermat, 1601-1665*) принцип (видети [*Erlichson, 1999; Čović, Lukačević, Vesković, 2007*]).

сувог (Кулоновог (*Charles-Augustin de Coulomb, 1736-1806*)) трења и вискозног трења, респективно. У раду [Čović, Vesković, 2008] показано је да резултати из [Ashby, Brittin, Love, Wyss, 1975; Hayen, 2005; Vratanaar, Saje, 1998] представљају специјалне случајеве брахистохроног кретања материјалне тачке по површи. У радовима [Đukić, Atanacković, 1976; Dooren, Vlassenbroeck, 1980; Lipp, 1997; Hennessey, Shakiban, 2010; Gershman, Nagaev, 1979] брахистохрони проблем је решен користећи теорију оптималног управљања. Решење класичног брахистохроног проблема, као задатка оптималног управљања, применом Чебишјовљевог (руски: *Пафнутиј Львович Чебышёв*, енглески: *Pafnuty Lvovich Chebyshev, 1821-1894*) низа, приказано је у раду [Dooren, Vlassenbroeck, 1980], док је аналитичко решење проблема брахистохроног кретања, при постојању отпора услед Кулоновог трења, приказано у раду [Lipp, 1997]. У раду [Jeremić, Šalinić, Obradović, Mitrović, 2011] разматра се брахистохроно кретање материјалне тачке променљиве масе у произвољном пољу познатих потенцијалних и непотенцијалних сила, користећи Понтрјагинов принцип максимума [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962; Bryson, Ho, 1975] и теорију сингуларних оптималних управљања [Gabasov, Kirillova, 1973; Kirk, 2004], где је за управљачку променљиву узет други извод координате $y = y(x)$ у односу на независно променљиву x ⁹, тј. $u = d^2y/d^2x$. У раду [Šalinić, Obradović, Mitrović, Rusov, 2011] разматра се брахистохроно кретање материјалне тачке у произвољном пољу сила за случај ограничене силе реакције везе до фиксних граница. Крива се третира као билатерална или унилатерална веза која може да буде глатка или храпава. Као и у раду [Jeremić, Šalinić, Obradović, Mitrović, 2011], за управљачку променљиву је такође узет други извод координате $y = y(x)$ у односу на независно променљиву x .

Брахистохрони проблем у другом поглављу решен је као задатак оптималног управљања, користећи Понтрјагинов принцип максимума [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962; Bryson, Ho, 1975; Leitman, 1966] и теорију

⁹ Независно променљива величина x представља хоризонталну координату материјалне тачке.

сингуларних оптималних управљања [*Obradović, 1994; Gabasov, Kirillova, 1973; Kirk, 2004; Leitmann, 1981*], узимањем пројекције силе реакције везе за управљачку променљиву¹⁰. Затим, одређене су параметарске једначине трајекторије тачке M , као и закон промене брзине тачке. Дат је општи нумерички поступак за одређивање вишеструких решења одговарајућег двотачкастог граничног проблема (TPBVP¹¹) како за случај неограничене, тако и случај ограничене реакције везе. Нумерички алгоритам GMTBVP(), коришћен у овом поглављу, формиран је у програмском окружењу MatLab. Програм GMTBVP(), у основи представља Монте Карло (*Monte Carlo*) метод уз одређене модификације у циљу брже и поузданије конвергенције у односу на већ постојеће нумеричке алгоритме. Како је смањење граничне вредности реакције везе праћено смањењем временског интервала који одговара сингуларном делу оптималног управљања, одређени су такође непознати гранични услови TPBVP за случај минималне граничне вредност реакције везе.

У **трећем поглављу** разматра се проблем брахистохроног кретања материјалне тачке која се креће сада у еуклидовом (*Euclid, 300. n. n. e.*) тродимензионалном простору E_3 . Тачка M креће се у произвољном потенцијалном пољу сила. Брахистохрони проблем је формулисан као задатак оптималног управљања, користећи Понтрјагинов принцип максимума, узимањем пројекција брзине тачке за управљачке променљиве. Брахистохрони проблем састоји се у одређивању оптималних управљања, као и њима одговарајућих координата стања, тако да тачка, полазећи из почетног положаја $M_0(x_0, y_0, z_0)$, пређе у крајњи положај на многострукост

$$\Psi_f(x, y, z) = 0,$$

уз неизмењену вредност механичке енергије, за минимално време. У трећем поглављу дат је поступак процене интервала вредности координата спрегнутог вектора у почетном тренутку, а услед хомогености спрегнутог система директно су пропорционалне изабраној непозитивној вредности координате $\lambda_0 \leq 0$. На основу

¹⁰ Независно променљива величина у овом случају је време t .

¹¹ На енглеском: two-point boundary value problem (TPBVP).

датих процена, може се тврдити да се сва решења одговарајућег TPBVP сигурно налазе унутар датих интервала, а самим тим и глобални минимум времена при брахистохроном кретању тачке. У случају вишеструких решења принципа максимума, глобални минимум је оно решење које одговара минималном времену. Решења одговарајућег TPBVP (непознате вредности величина стања на границама интервала кретања) могуће је и графички представити, у простору непознатих величина, тачкама добијеним пресеком одговарајућих линија, где број тачака одговара броју решења TPBVP, а координате тачака у разматраном простору одговарају решењима TPBVP. У свим до сада публикованим радовима није разматран случај брахистохроног кретања материјалне тачке у простору. Имајућу то у виду, можемо констатовати да је у оквиру трећег поглавља извршено уопштење проблема брахистохроног кретања материјалне тачке у произвољном потенцијалном пољу сила.

У **четвртом поглављу** разматра се брахистохроно кретање холономног склерономног механичког система. Систем се креће у произвољном пољу потенцијалних сила. Користећи варијациони рачун, у раду [McConnell, 1930] извршена је генерализација проблема брахистохроног кретања конзервативног холономног механичког система са n степена слободе (DOF¹²) кретања. У четвртом поглављу, проблем је формулисан као задатак оптималног управљања, користећи Понтрјагинов принцип максимума, где су генерализане брзине узете као променљиве управљања. У поступку решавања формулисаног проблема оптималног управљања, могу се користити методе који се генерално сврставају у две главне групе и то, индиректне и директне методе. Преглед литературе у вези ових метода може се видети, на пример, у раду [Bertolazzi, Biral, Da Lio, 2006]. Директне методе заснивају се на дискретизацији формулисаног задатка оптималног управљања у циљу добијања проблема нелинеарног програмирања (или проблема нелинеарне оптимизације), док се индиректне методе заснивају на нумеричком решавању одговарајућег TPBVP. У четвртом поглављу развијен је поступак на основу кога смо у могућности да

¹² На енглеском: degrees of freedom (DOF).

графички представимо решења TPBVP, за механичке системе до 3 DOF кретања, тачкама добијеним пресеком одговарајућих просторних линија, док за механичке система са произвољним бројем DOF кретања користе се различите нумеричке методе глобалне оптимизације. Одговарајући TPBVP решен је различитим, већ постојећим, нумеричким алгоритмима (shooting method, Nelder Mead method, genetic algorithm, differential evolution, simulated annealing, random search, C-GRASP algorithm) у циљу изналажења оптималних вредности параметара који утичу на тачност и брзину конвергенције решења уз дату упоредну анализу решења нумеричких алгоритама за глобалну оптимизацију. Затим је развијен нови нумерички поступак¹³, на основу кога смо у могућности да графички представимо функцију грешке. Недостатак методе гађања¹⁴ [Stoer, Bulirsch, 1993], као и нумеричких метода глобалне оптимизације, начелно се састоји у томе што је конвергенција нумеричког решења TPBVP веома осетљива на почетни скуп недостајућих граничних вредности (почетну итерацију). Другим речима, да би се остварила конвергенција потребно је да почетна итерација буде довољно „близу” неког од решења TPBVP. Процена интервала вредности непознатих граничних фазних координата начелно се може одредити, имајући у виду њихову физичку интерпретацију, док процена интервала вредности непознатих граничних спрегнутих координата представља прави изазов, имајући у виду да спрегнуте променљиве немају физичку интерпретацију у општем случају. У том смислу, у наставку, предложене су различите методе за процену интервала вредности непознатих граничних спрегнутих координата. У раду [Dixon, Biggs, 1972] приказан је метод у коме се спрегнуте координате у почетном тренутку изражавају у односу на променљиве стања за које, као што је речено, можемо одредити процену интервала вредности. У раду [Seywald, Kumar, 1996] користи се метод заснован на динамичком програмирању, док се у раду [Fahroo, Ross, 2001]

¹³ Који се састоји у одређивању минималне вредности шутинг функције (функције грешке) при унапред задатом крајњем тренутку, од почетног $t_0 = 0$ до задатог $t = nh (n \in \mathbb{N})$, са одређеним кораком h .

¹⁴ Назив метод гађања је слободан превод енглеског термина „shooting method”, док ће убудуће бити коришћен термин метод шутинга или шутинг метод.

користи Лежандреов (*Adrien-Marie Legendre, 1752-1833*) псеудоспектрални метод¹⁵. Са друге стране, у радовима [*Graichen, Petit, 2008; Jiang, Baoyin, Li, 2012*] приказана су два различита поступка заснована на хомотопском приступу. У раду [*Park, Guibout, Scheeres, 2006*] представљен је метод заснован на теорији канонских трансформација и генерисању функција (generating functions) у Хамилтоновој (*Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865*) динамици. У раду [*Obradović, Šalinić, Jeremić, Mitrović, 2014*], одговарајућим избором функција управљања¹⁶, избегнута је потреба за проценом интервала вредности непознатих граничних координата спрегнутог вектора у почетном тренутку. Коначно, у недавно објављеном раду [*Mehrpouya, Shamsi, 2015*], након формирања TPBVP одговарајућег задатка оптималног управљања, врши се модификација самог TPBVP помоћу континуалних метода као и дискретизација коришћењем Гаусове (*Johann Carl Friedrich Gauss, 1777-1855*) псеудоспектралне методе, чиме се добија систем нелинеарних алгебарских једначина. Нумеричким решавањем овог система, добијене су апроксимативне вредности недостајућих координата спрегнутог вектора.

У четвртном поглављу, увођењем линеарне трансформације координата спрегнутог вектора, одговарајућа позитивно дефинитна квадратна форма одређена у почетном тренутку, своди се на канонски облик. Глобална процена интервала вредности непознатих координата спрегнутог вектора у почетном тренутку одређена је на основу канонске форме. Поступак је илустрован најпре на примеру брахистохроног кретања диска у вертикалној равни у хомогеном пољу силе Земљине теже, а затим и на примеру брахистохроног кретања сфере у простору, где је указано на постојање вишеструких решења. Део научних резултата изложених у четвртном поглављу, публиковани су у реномираном часопису *Meccanica* категорије M21 [*Radulović, Obradović, Šalinić, 2017*].

У **петом поглављу** разматра се брахистохроно кретање склерономног механичког система чије кретање је ограничено нехомогеним нехолономним везама у општем

¹⁵ Концизан преглед псеудоспектралног метода дат је у раду [*Hull, 2008*].

¹⁶ За управљачке променљиве узети су први изоди по времену генералисаних брзина, тј.

$$u^s = \ddot{q}^s, s = \overline{1, n-1}.$$

случају. Проблем је формулисан као задатак оптималног управљања, користећи Понтрјагинов принцип максимума, где су квазибрзине узете као променљиве управљања. Брахистохрони проблем састоји се у одређивању оптималних управљања, као и њима одговарајућих генерализаних координата, тако да механички систем из одређеног почетног положаја, пређе у крајњи положај на задатој многострукости, уз неизмењену вредност механичке енергије, за минимално време. У раду [Obradović, Čović, Vesković, Dražić, 2010] разматра се општи случај брахистохроног кретања реономног механичког система чије кретање је ограничено линеарним реономним нехолономним везама, где су као пример узете Чаплигинове саонице које се крећу по хоризонталној сани леда, чији је закон кретања познат. У разматраном примеру, где се TPBVP своди се на решавање четворо-параметарског шутинга, нису одређене процене интервала вредности недостајућих граничних услова, као ни могућност постојања вишеструких решења TPBVP при крајњој вредности угла $\varphi_f = \pi/4$. У раду [Radulović, Obradović, Jeremić, 2014.a] разматра се брахистохроно кретање упрошћеног модела возила између два задата положаја у хоризонталној равни. Процена интервала вредности недостајућих граничних услова у овом случају се може одредити. Решење TPBVP при крајњој вредности угла $\varphi_f = \pi/2$ је јединствено. У раду [Radulović, Zeković, Lazarević, Segl'a, 2014.b] разматра се брахистохроно кретање нехолономног механичког система са управним брзинама. Брахистохрони проблем у претходно поменутом раду формулисан је као задатак оптималног управљања¹⁷, где се TPBVP у овом случају такође своди на решавање четворо-параметарског шутинга, код кога није било могуће дати процене интервала вредности непознатих координата λ_x и λ_y спрегнутог вектора. Имајући у виду да не постоји теорема о јединствености и егзистенцији решења TPBVP, природно се намећу следећа питања која, на пример, у раду [Šalinić, Obradović, Mitrović, 2013] нису разматрана: да ли уопште постоји решење одговарајућег TPBVP при познатом почетном и крајњем положају разматраног механичког система, да ли

¹⁷ За управљачке променљиве узете су брзине тачака A и B респективно.

се може одредити процена интервала вредности свих недостајућих граничних услова, као и да ли постоји општи поступак за одређивање свих могућих решења TPBVP? Имајући у виду важност ових питања, како бисмо са сигурношћу могли да тврдимо да постоји решење TPBVP, као да је добијено решење и оптимално, проистекла је мотивација аутора за писањем овог поглавља. У петом поглављу показано је да се глобална процена свих координата спрегнутог вектора у почетном тренутку, у општем случају, не може дати. Поступак је илустрован најпре на примеру брахистохроног кретања Чаплигинових саоница, где је показано под којим условима се може одредити глобални минимум времена, а затим и на примеру брахистохроног кретања нехолономног механичког система са управним брзинама. Део научних резултата до којих се дошло у петом поглављу, публиковани су у реномираном часопису *Mathematics and Mechanics of Solids* категорије M21 [Radulović, Šalinić, Obradović, 2016].

У **шестом поглављу** разматра се брахистохроно кретање нехолономног механичког система променљиве масе са ограниченим управљањима. Нехолономни механички систем креће се у произвољном пољу познатих потенцијалних и непотенцијалних сила. Истраживање аутора на овом пољу није било инспирисано само потребом да допринесе проширењу постојећег фундаменталног знања, с обзиром да је досадашњи приступ формирања TPBVP, узимањем првих изода по времену генералисаних брзина за управљачке променљиве, неефективан у општем случају¹⁸, већ и различитим применама у инжењерској пракси [Legeza, 2008; Legeza, 2010.a; Legeza, 2010.b; Gershman, Nagaev, 1979; Đukić, 1976; Maisser, 1998; Hennessey, Shakiban, 2010]. На основу изложеног поступка у шестом поглављу, у могућности смо да формирамо TPBVP узимањем првих извода по времену квазибрзина за управљачке променљиве. Следећи скуп референци обухвата референтне радове у којима се разматра брахистохроно кретање крутог тела [Legeza, 2008; Legeza, 2010.a; Legeza,

¹⁸ На примеру нехолономног механичког система променљиве масе са управним брзинама, разматраног у *Поглављу 6*, показано је да се недостајући гранични услови TPBVP не могу нумерички одредити уколико се за управљачке променљиве одаберу први изводи по времену генералисаних брзина.

2010.b; Đukić, 1976; Akulenko, 2009], односно брахистохроно кретање система крутих тела [Čović, Lukačević, Vesković, 2007; Čović, Lukačević, 1999; Čović, Vesković, 2002; Čović, Vesković, 2009]. У раду [Čović, Lukačević, 1981] разматра се брахистохроно кретање холономног склерономног неконзервативног механичког система на кога дејствују активне силе које су експлицитно функције времена, генералисаних координата и генералисаних брзина. Брахистохроно кретање конзервативног нехолономног механичког система разматрано је у раду [Đukić, 1979], где су притом формиране диференцијалне једначине кретања разматраног система и одређене управљачке силе. У раду [Čović, Lukačević, 1984] разматра се брахистохрони проблем механичког система чије кретање ограничавају нехолономне хомогене линеарне везе. У раду [Zeković, Čović, 1993] разматра се брахистохрони проблем механичког система чије кретање ограничавају нехолономне нехомогене линеарне везе, док се у раду [Zeković, 1990] разматра брахистохрони проблем механичког система чије кретање ограничавају нелинеарне нехолономне везе у општем случају. У раду [Čović, Lukačević, 1999] разматран је брахистохрони проблем проширен на систем крутих тела у форми затвореног кинематског ланца без спољашњих веза, док је у раду [Čović, Vesković, 2002] разматран брахистохрони проблем система крутих тела, у форми затвореног кинематског ланца, који се крећу у хомогеном гравитационом пољу, где је кретање разматраног система ограничено спољашњим везама. Брахистохроно кретање система крутих тела у познатом потенцијалном пољу сила и сила Кулоновог трења, у специјалном случају, разматрано је у раду [Čović, Vesković, 2009], где је показано да постоји потпуна аналогија између брахистохроног кретања механичког система са два степена слободе кретања, чији је метрички тензор константан и брахистохроног кретања материјалне тачке под дејством сила вискозног и Кулоновог трења. У раду [Šalinić, Obradović, Mitrović, 2012], инспирисани идејама из рада [Čović, Vesković, 2009], аутори разматрају брахистохрони проблем механичког система¹⁹ са два DOF кретања. Кретање

¹⁹ У раду се претпоставља да су координате коваријантног метричког тензора константне, тј. $a_{ij} = \text{const.}(i, j = 1, 2)$.

разматраног механичког система ограничено је идеалним билатералним везама и једном унилатералном везом са Кулоновим трењем.

У раду [Jeremić, Radulović, Obradović, 2016] разматра се проблем брахистохроног кретања нехолономног механичког система променљиве масе са управним брзинама. Закони промене маса материјалних тачака A и B су исти, што је дало могућност ауторима рада да реше задатак оптималног управљања на најједноставнији могући начин, без примене теорије сингуларних оптималних управљања.

У шестом поглављу закони промене маса материјалних тачака²⁰, као и релативне брзине припајања или одвајања или истовременог припајања и одвајања честица познати су. Проблем је формулисан као задатак оптималног управљања, користећи Понтрјагинов принцип максимума и теорију сингуларних оптималних управљања²¹. Такође, дати су различити поступци за реализацију брахистохроног кретања. Поступак је илустрован најпре на примеру брахистохроног кретања нехолономног механичког система променљиве масе са управним брзинама, како за случај неограничених, тако и случај ограничених управљачких сила, а затим и на примеру брахистохроног кретања упрошћеног модела возила за случај неограничених и ограничених реакција нехолономних веза. Део научних резултата до којих се дошло у шестом поглављу, публиковани су у реномираном часопису *Nonlinear Dynamics* категорије M21a [Radulović, Obradović, Šalinić, Mitrović, 2016].

У седмом поглављу разматра се брахистохроно кретање нехолономног механичког система Чаплигиновог типа као изопериметријски проблем²². Проблем је формулисан као задатак оптималног управљања, користећи Понтрјагинов принцип максимума [Leitmann, 1981]. Нехолономни механички системи Чаплигиновог типа [Zeković, 2012; Neimark, Fufaev, 1967] су специјалан тип система где једначине нехолономних веза, кинетичка енергија, потенцијална енергија као и непотенцијалне генералисане силе не зависе од кинематски зависних координата, тј. генералисаних

²⁰ Закони промене маса материјалних тачака у општем случају су различити.

²¹ У шестом поглављу извршено је уопштење резултата из рада [Jeremić, Radulović, Obradović, 2016].

²² Да се брахистохроно кретање нехолономног механичког система Чаплигиновог типа може решити као изопериметријски проблем, први је уочио проф. др Вукман Човић.

координата које одговарају зависним генерализаним брзинама. Изопериметријски проблеми [Fempl, 1965; Pars, 1968; Leitmann, 1981] у ширем смислу представљају све оне проблеме у којима се траже екстремалне вредности функционала при чему су унапред задата ограничења у виду одређених интеграла. У [Leitmann, 1981] (13.2, пп. 181-188) изведени су потребни услови оптималности Понтрјагиновог принципа максимума при постојању допунских ограничења у виду одређених интеграла. У раду [Sumbatov, 2017] проблем брахистохроног кретања материјалне тачке у хомогеном гравитационом пољу, при постојању отпора услед сувог (Кулоновог) трења, решен је као варијациони изопериметријски проблем. Притом су одређене коначне параметарске једначине екстремалне криве.

Како се једначине нехолономних веза, које ограничавају кретање механичког система Чаплигиновог типа, могу записати у виду одређених интеграла, аутор је у седмом поглављу показао да се брахистохроно кретање нехолономног механичког система Чаплигиновог типа може решити као изопериметријски проблем. Затим, показао је да се код механичког система Чаплигиновог типа може извршити снижавање реда система. Изложени поступак је илустрован најпре на примеру брахистохроног кретања Чаплигинових саоница, а затим и на примеру брахистохроног кретања нехолономног механичког система са управним брзинама.

Поглавље 1

Диференцијалне једначине кретања механичких система са линеарним нехомогеним нехолономним везама – разне форме и њихова еквивалентност

1.1.1 Уводна разматрања

Разматра се кретање система материјалних тачака M_p ($p=1, \dots, N$), маса m_p , које у општем случају могу бити променљиве масе. Положај система у еуклидовом тродимензионалном простору E_3 у потпуности је одређен Декартовим (*Renè Descartes, 1596-1650*) правоуглим координатама x_p, y_p и z_p . Уведимо, уместо променљивих x_p, y_p и z_p , уопштене Декартове координате $\xi_{\mathcal{G}}$ ($\mathcal{G}=1, \dots, 3N$), на уобичајен начин $\xi_{3p-2} = x_p, \xi_{3p-1} = y_p$ и $\xi_{3p} = z_p$. Нека кретање разматраног система ограничава g холономних веза, као и l нехолономних веза за које претпостављамо у првом делу овог излагања да су линеарне, стационарне и нехомогене. У том случају, положај система у *конфигурационом простору* V_n , где је $n = 3N - g$, у потпуности је одређен са n генерализаних координата $\mathbf{q} = (q^1, q^2, \dots, q^n)^T$ за које кажемо да су независне у *геометријском смислу*. Сада смо у

могућности да геометријски независне Декартове координате изразимо у функцији генералисаних координата $\xi^i = \xi^i(\mathbf{q})$, под условом да је детерминанта Јакобијеве (*Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804-1851*) матрице $\left[\partial \xi^i / \partial q^j \right] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ трансформације, односно Јакобијан $\det \left[\partial \xi^i / \partial q^j \right] \neq 0 (i, j = 1, \dots, n)$ различит од нуле. Наиме, сваки скуп одређених вредности координата q^i одређује једну *конфигурацију*—положај и облик система. Ако сваку такву конфигурацију система узмемо као тачку у простору, имаћемо n –димензионални простор кога називамо конфигурациони простор V_n (римански простор (*Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866*)), тако да свакој тачки овог простора одговара једна потуно одређена конфигурација разматраног система и обрнуто [*AnĐelić, 1967*]. Такође, познати су закони промене маса материјалних тачака

$$m_p = m_p(t), \quad p = 1, \dots, N, \quad (1.1)$$

где су $m_p(t)$ непрекидне и диференцијабилне функције времена, где су $m_p \equiv m_{3p-2} \equiv m_{3p-1} \equiv m_{3p}$ у циљу једноставнијег записа и бољег искоришћења индекса. Промена масе може наступити припајањем или одвајањем или истовременим припајањем и одвајањем честица тачкама, при чему се претпоставља да је процес припајања или одвајања честица непрекидан. Релативне брзине припајања или одвајања честица у општем случају могу бити функције генералисаних координата, генералисаних брзина у времена

$$\vec{v}_p^{rel} = \vec{v}_p^{rel}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad p = 1, \dots, N, \quad (1.2)$$

где је $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n)^T$ вектор генералисаних брзина. Једначине нехолономних веза, које ограничавају кретање разматраног механичког система променљиве масе, имају следећи облик

$$\psi^V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \equiv B_i^V \dot{q}^i + B^V = 0, \quad (1.3)$$

где су $B_i^V = B_i^V(\mathbf{q})$ и $B^V = B^V(\mathbf{q})$ непрекидне функције са непрекидним првим изводима у области, у којој разматрамо кретање система. На тај начин кретање разматраног механичког система биће разматрано као кретање репрезентативне тачке чији је положај у $3N$ -димензионалном афиним векторском простору одређен вектором положаја

$$\vec{r} = \xi^g \vec{e}_g, \quad (1.4)$$

где су

$$\vec{e}_g \cdot \vec{e}_\theta = \delta_{g\theta} = \begin{cases} 1 & \text{ако је } g = \theta \\ 0 & \text{ако је } g \neq \theta \end{cases}, \quad (1.5)$$

Кронекерови делта симболи (*Leopold Kronecker, 1823-1891*). Положај механичког система у конфигурационом простору V_n одређен је вектором положаја \vec{r} репрезентативне тачке, који представља функцију генералисаних координата \mathbf{q}

$$\vec{r} = \vec{r}(\mathbf{q}), \quad (1.6)$$

имајући у виду да се координате свих тачака система могу изразити у функцији генералисаних координата \mathbf{q}

$$\xi^g = \xi^g(\mathbf{q}). \quad (1.7)$$

Једначине нехолономних веза (1.3), можемо изразити и на следећи начин

$$\psi^V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \equiv \dot{q}^v - b_\alpha^v \dot{q}^\alpha - b^v = 0, \quad (1.8)$$

где су

$$\begin{aligned} b_\alpha^v &= -C_\rho^v B_\alpha^\rho, & b^v &= -C_\rho^v B^\rho, \\ C_\mu^v B_\rho^\mu &= \delta_\rho^v, \end{aligned} \quad (1.9)$$

под условом да је детерминанта матрице $[B_\rho^v] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ различита од нуле, тј.

²³ Користи се Ајнштајнова конвенција о сабирању. Индекси у *Поглављу 1* узимају следеће вредности: $i, j, k, r, s, t = 1, \dots, n$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon = 1, \dots, m$; $\nu, \rho, \mu = m+1, \dots, m+l = n$; $\theta, \zeta = 1, \dots, 3N$.

$$\det \left[B_{\rho}^{\nu} \right] \neq 0, \quad (1.10)$$

где је $m = n - l$ број степена слободе кретања система, који уједно представља и број кинематски независних координата q^{α} које одговарају независним генералисаним брзинама \dot{q}^{α} . Независне генералисане брзине могу се изразити као хомогена линеарна форма независних квазибрзина (кинематичких параметара) $\dot{\pi}^1, \dots, \dot{\pi}^m$ [Lurie, 2002; Papastavridis, 2002; Papastavridis, 1999]

$$\dot{q}^{\alpha} = c_{\beta}^{\alpha} \dot{\pi}^{\beta}, \quad (1.11)$$

где су $c_{\beta}^{\alpha} = c_{\beta}^{\alpha}(\mathbf{q})$ непрекидне функције са непрекидним првим изводима у области, у којој разматрамо кретање система. Зависне генералисане брзине, имајући у виду (1.8) и (1.11), сада се могу изразити у следећем облику

$$\dot{q}^{\nu} = c_{\beta}^{\nu} \dot{\pi}^{\beta} + b^{\nu}, \quad (1.12)$$

где су $c_{\beta}^{\nu} = b_{\alpha}^{\nu} c_{\beta}^{\alpha}$. У општем случају, све генералисане брзине \dot{q}^i могу се изразити као

$$\dot{q}^i = c_j^i \dot{\pi}^j + \varphi^i, \quad (1.13)$$

па уколико, не умањујући општост даљег излагања, за зависне квазибрзине изаберемо једначине нехолономних веза (1.3)

$$\dot{\pi}^{\nu} = B_i^{\nu} \dot{q}^i + B^{\nu} = 0, \quad (1.14)$$

релација (1.13) добија следећи облик

$$\dot{q}^i = c_{\alpha}^i \dot{\pi}^{\alpha} + \varphi^i, \quad (1.15)$$

где су $\varphi^{\alpha} = 0$ и $\varphi^{\nu} = b^{\nu}$, што је у сагласности са (1.11) и (1.12). За потребе даљих разматрања, независне квазибрзине $\dot{\pi}^{\alpha}$, из релације (1.15), могу се изразити у следећем облику

$$\dot{\pi}^{\alpha} = d_i^{\alpha} (\dot{q}^i - \varphi^i), \quad (1.16)$$

где су $d_i^{\alpha} c_{\beta}^i = \delta_{\beta}^{\alpha}$. Контраваријантне координате вектора убрзања [Lurie, 2002; Papastavridis, 2002; Papastavridis, 1999] имају следећи облик

$$a^i = \ddot{q}^i + \begin{bmatrix} i \\ k r \end{bmatrix} \dot{q}^k \dot{q}^r, \quad (1.17)$$

где су $\begin{bmatrix} i \\ k r \end{bmatrix}$ Кристофелови (*Elwin Bruno Christoffel, 1829-1900*) симболи друге врсте у конфигурационом простору V_n . Имајући у виду (1.15), контраваријантне координате вектора убрзања, после краћег сређивања, добијају следећи облик

$$\begin{aligned} a^i = & c_\alpha^i \ddot{\pi}^\alpha + c_\beta^r \left(\frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^r} + \begin{bmatrix} i \\ k r \end{bmatrix} c_\alpha^k \right) \dot{\pi}^\alpha \dot{\pi}^\beta \\ & + \left(\frac{\partial c_\beta^i}{\partial q^r} \varphi^r + \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^r} c_\beta^r + 2 \begin{bmatrix} i \\ k r \end{bmatrix} c_\beta^r \varphi^k \right) \dot{\pi}^\beta + \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial q^r} + \begin{bmatrix} i \\ k r \end{bmatrix} \varphi^k \right) \varphi^r. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Кинетичка енергија [*Lurie, 2002; Papastavridis, 2002; Papastavridis, 1999*] разматраног система је

$$T = \frac{1}{2} A_{g\theta} \dot{\xi}^g \dot{\xi}^\theta, \quad (1.19)$$

где су

$$A_{g\theta} = \delta_{g\theta} \sqrt{m_g m_\theta}, \quad \dot{\xi}^g = \frac{d\xi^g}{dt} = \frac{\partial \xi^g}{\partial q^i} \dot{q}^i. \quad (1.20)$$

Кинетичка енергија система (1.19), имајући у виду (1.20), добија следећи облик

$$T = \frac{1}{2} A_{g\theta} \frac{\partial \xi^g}{\partial q^i} \frac{\partial \xi^\theta}{\partial q^j} \dot{q}^i \dot{q}^j, \quad (1.21)$$

што се може записати у добро познатом облику [*Lurie, 2002; Papastavridis, 2002; Papastavridis, 1999*]

$$T = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j, \quad (1.22)$$

где су

$$a_{ij} = A_{g\theta} \frac{\partial \xi^g}{\partial q^i} \frac{\partial \xi^\theta}{\partial q^j}. \quad (1.23)$$

Систем a_{ij} , на основу релације (1.23) којом је дефинисан, биће симетричан, односно

$$a_{ij} = a_{ji}. \quad (1.24)$$

Величине a_{ij} у општем случају, имајући у виду (1.1) и (1.23), су функције генерализаних координата и времена

$$a_{ij} = a_{ij}(\mathbf{q}, t). \quad (1.25)$$

Са друге стране, с обзиром да је кинетичка енергија T по својој природи независна од трансформација координата–скаларна инваријанта, на основу критеријума за тензорску природу, a_{ij} представљају координате симетричног двапут коваријантног тензора, јер је \dot{q}^i контраваријантни вектор. Из израза (1.22) за кинетичку енергију система, можемо писати

$$2Tdt^2 = a_{ij}dq^i dq^j. \quad (1.26)$$

Израз (1.26) у конфигурационом простору V_n може се узети као метричка форма, тј.

$$ds^2 = a_{ij}dq^i dq^j. \quad (1.27)$$

Дакле, метричка форма конфигурационог простора V_n је облика

$$ds^2 = 2Tdt^2. \quad (1.28)$$

Како кинетичка енергија система представља позитивно дефинитну квадратну форму, конфигурациони простор V_n је простор позитивно дефинитне метрике. Кинетичка енергија система, имајући у виду (1.15), сада добија следећи облик

$$T^* = T(\dot{q}^i = c_{\alpha}^i \dot{\pi}^{\alpha} + \varphi^i) = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \dot{\pi}^{\alpha} \dot{\pi}^{\beta} + a_{ij} \varphi^i c_{\beta}^j \dot{\pi}^{\beta} + \frac{1}{2} a_{ij} \varphi^i \varphi^j, \quad (1.29)$$

где су

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) = a_{ij} c_{\alpha}^i c_{\beta}^j, \quad (1.30)$$

координате коваријантног метричког тензора у односу на кинематски независне координате q^1, \dots, q^m , односно независне квазикоординате π^1, \dots, π^m . У циљу формирања диференцијалних једначина које описују кретање нехолономног механичког система променљиве масе, пођимо од израза за Лагранж–Даламберов

принцип написан у облику [Čović, 1976; Vujičić, 1990; Lurie, 2002; Papastavridis, 2002; Papastavridis, 1999]

$$a_{ij}(a^j - Q^j)\delta q^i = 0, \quad (1.31)$$

тј.

$$(a_{ij}a^j - Q_i)\delta q^i = 0, \quad (1.32)$$

где су $Q_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = a_{ij}Q^j$ коваријантне генералисане силе које одговарају геометријски независним координатама. Сагласно принципу Херца–Хелдера (*Heinrich Rudolf Hertz, 1857-1894; Otto Ludwig Hölder, 1859-1937*) [*Baird, Hughes, Nordmann, 1998; Vujanović, Atanacković, 2004*], на основу (1.15), пишемо

$$\delta q^i = c_\alpha^i \delta \pi^\alpha. \quad (1.33)$$

Из једначине (1.32), имајући у виду (1.18) и (1.33), као и да су варијације $\delta \pi^\alpha$ независне у конфигурационом простору V_m , добија се m диференцијалних једначина у коваријантном облику

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} \ddot{\pi}^\beta + a_{ij} c_\alpha^i c_\gamma^k \left(\frac{\partial c_\beta^j}{\partial q^k} + \Gamma_{kr}^j c_\beta^r \right) \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma + a_{ij} c_\alpha^i \left(\frac{\partial c_\gamma^j}{\partial q^k} \varphi^k + \frac{\partial \varphi^j}{\partial q^k} c_\gamma^k + 2\Gamma_{kr}^j c_\gamma^k \varphi^r \right) \dot{\pi}^\gamma \\ + a_{ij} c_\alpha^i \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial q^k} + \Gamma_{kr}^j \varphi^r \right) \varphi^k = Q_\alpha^*, \end{aligned} \quad (1.34)$$

где су Γ_{kr}^j Кристофелови симболи друге врсте у конфигурационом простору са метриком (1.27), док су генералисане силе које одговарају кинематски независним координатама

$$Q_\alpha^*(\mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\pi}}, t) = c_\alpha^i \bar{Q}_i, \quad (1.35)$$

где су $\bar{Q}_i = Q_i(\dot{q}^i = c_\beta^i \dot{\pi}^\beta + \varphi^i)$, док је $\dot{\boldsymbol{\pi}} = (\dot{\pi}^1, \dot{\pi}^2, \dots, \dot{\pi}^m)^T$ вектор независних квазибрзина.

За случај да су нехолономне везе (1.3), односно (1.8), хомогене ($\varphi^i = 0$),

диференцијалне једначине кретања (1.34) имају знатно једноставнији облик [Čović, 1976]

$$G_{\alpha\beta}\ddot{\pi}^\beta + a_{ij}c_\alpha^i c_\gamma^k \left(\frac{\partial c_\beta^j}{\partial q^k} + \Gamma_{kr}^j c_\beta^r \right) \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma = Q_\alpha^*. \quad (1.36)$$

Једначине (1.34), односно (1.36), могу се приказати у следећем облику

$$G_{\alpha\beta}\ddot{\pi}^\beta = \Delta_\alpha, \quad (1.37)$$

где су

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha(\mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\pi}}, t) = & Q_\alpha^* - a_{ij}c_\alpha^i c_\gamma^k \left(\frac{\partial c_\beta^j}{\partial q^k} + \Gamma_{kr}^j c_\beta^r \right) \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma \\ & - a_{ij}c_\alpha^i \left(\frac{\partial c_\gamma^j}{\partial q^k} \varphi^k + \frac{\partial \varphi^j}{\partial q^k} c_\gamma^k + 2\Gamma_{kr}^j c_\gamma^k \varphi^r \right) \dot{\pi}^\gamma - a_{ij}c_\alpha^i \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial q^k} + \Gamma_{kr}^j \varphi^r \right) \varphi^k, \end{aligned} \quad (1.38)$$

док за случај да су $\varphi^i = 0$, Δ_α постаје

$$\Delta_\alpha(\mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\pi}}, t) = Q_\alpha^* - a_{ij}c_\alpha^i c_\gamma^k \left(\frac{\partial c_\beta^j}{\partial q^k} + \Gamma_{kr}^j c_\beta^r \right) \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma. \quad (1.39)$$

Генералисане силе које одговарају геометријски независним координатама, у општем случају, могу се приказати у следећем облику

$$Q_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + \tilde{Q}_i + Q_i^{\text{var}}, \quad (1.40)$$

где су $\tilde{Q}_i = \tilde{Q}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ генералисане непотенцијалне силе, док су

$$Q_i^{\text{var}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{p=1}^N \dot{m}_p \bar{v}_p^{\text{rel}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_p}{\partial q^i}, \quad (1.41)$$

генералисане реактивне силе [Cvetičanin, 1993; Pesce, 2003], које настају услед припајања (или одвајања) честица. Генералисане силе услед наметнутих ограничења кретања (1.3), односно (1.8), имају следећи облик

$$Q_i^\Lambda(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \Lambda_v \frac{\partial \psi^v}{\partial \dot{q}^i}, \quad (1.42)$$

где су Λ_ν Лагранжеви множитељи веза. На основу (1.8), (1.35) и (1.42), можемо писати

$$Q_\alpha^{*\Lambda} = c_\alpha^\beta Q_\beta^\Lambda + c_\alpha^\nu Q_\nu^\Lambda = \Lambda_\nu (c_\alpha^\nu - c_\alpha^\beta b_\beta^\nu). \quad (1.43)$$

Како су према (1.12) $c_\beta^\nu = b_\alpha^\nu c_\beta^\alpha$, генералисане силе $Q_\alpha^{*\Lambda}$ које одговарају кинематски независним координатама, односно независним квазикоординатама, постају

$$Q_\alpha^{*\Lambda} = 0. \quad (1.44)$$

Овим је показано да непознати Лагранжеви множитељи веза Λ_ν не фигуришу у диференцијалним једначинама кретања (1.34) и (1.36), односно у конфигурационом простору V_m , чиме је поступак одређивања кретања, у односу на поступак одређивања реакција нехолономних веза у потпуности раздвојен. Да су генералисане силе $Q_\alpha^{*\Lambda}$ заиста једнаке нули, односно да важи (1.44), може се доказати полазећи од тога да је *укупни рад реакција нехолономних идеалних веза на произвољним виртуелним померањима једнак нули* [Lurie, 2002; Papastavridis, 2002; Papastavridis, 1999]

$$\delta' A = \sum_{\nu=m+1}^n \bar{R}_\nu \cdot \delta \bar{r}_\nu = \sum_{\nu=m+1}^n \bar{R}_\nu \cdot \frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial q^i} \delta q^i = Q_i^\Lambda \delta q^i = Q_i^\Lambda c_\alpha^i \delta \pi^\alpha + Q_i^\Lambda c_\nu^i \delta \pi^\nu = 0. \quad (1.45)$$

Како су према (1.14) варијације $\delta \pi^\nu = 0$, израз (1.45) добија следећи облик

$$\delta' A = Q_i^\Lambda c_\alpha^i \delta \pi^\alpha = Q_i^{*\Lambda} \delta \pi^\alpha = 0, \quad (1.46)$$

где се, имајући у виду да су варијације $\delta \pi^\alpha$ независне, коначно добија да су $Q_\alpha^{*\Lambda} = 0$.

Математичка формулација принципа Херца–Хелдера говори нам о начину варирања нехолономних веза, а самим тим и о реакцијама тих веза. Наиме, на основу (1.3),

(1.42) и (1.45) пишемо $\delta' A = Q_i^\Lambda \delta q^i = (\Lambda_\nu B_i^\nu) \delta q^i = 0$, односно $\delta' A = \Lambda_\nu (B_i^\nu \delta q^i) =$

$\Lambda_\nu \delta \psi^\nu = 0$, где су $\delta \psi^\nu = B_i^\nu \delta q^i = 0$, што је у сагласности са принципом Херца–Хелдера приликом варирања нехолономних веза (1.3). Одредимо сада диференцијалне једначине кретање нехолономног механичког система полазећи од

Лагранж–Даламберовог принципа написаног у облику [Čović, 1976; Lurie, 2002; Papastavridis, 2002; Papastavridis, 1999]

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} - Q_k \right) \delta q^k = 0. \quad (1.47)$$

Како су према (1.33) $\delta q^k = c_\alpha^k \delta \pi^\alpha$, из једначине (1.47), имајући у виду да су варијације $\delta \pi^\alpha$ независне, добија се m једначина познатих под именом *Маџијеве једначине* (G. A. Maggi)

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} - Q_k \right) c_\alpha^k = 0. \quad (1.48)$$

На основу (1.15), (1.22), (1.29), (1.35) и (1.48), добија се m диференцијалних једначина кретања

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}^\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial q^k} c_\alpha^k + a_{ij} c_\gamma^j \left(\frac{\partial c_\beta^i}{\partial q^k} c_\alpha^k - \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^k} c_\beta^k \right) \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma + a_{ij} c_\gamma^j \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} c_\alpha^k - \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^k} \varphi^k \right) \dot{\pi}^\gamma \\ + a_{ij} \varphi^j \left(\frac{\partial c_\gamma^i}{\partial q^k} c_\alpha^k - \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^k} c_\gamma^k \right) \dot{\pi}^\gamma + a_{ij} \varphi^j \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} c_\alpha^k - \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^k} \varphi^k \right) = Q_\alpha^*, \end{aligned} \quad (1.49)$$

док за случај да је механички систем подвргнут хомогеним нехолономним везама, добија се

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}^\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial q^k} c_\alpha^k + a_{ij} c_\gamma^j \left(\frac{\partial c_\beta^i}{\partial q^k} c_\alpha^k - \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^k} c_\beta^k \right) \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma = Q_\alpha^*. \quad (1.50)$$

Како бисмо доказали еквивалентност форми (1.34) и (1.49), неопходно је најпре приказати прва два члана форме (1.49) у развијеном облику, у складу са (1.15) и (1.29)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}^\alpha} = G_{\alpha\beta} \dot{\pi}^\beta + c_\gamma^k \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} c_\alpha^i c_\beta^j + a_{ij} \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^k} c_\beta^j + a_{ij} \frac{\partial c_\beta^j}{\partial q^k} c_\alpha^i \right) \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma \\ + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} \varphi^k c_\alpha^i c_\beta^j + a_{ij} \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^k} \varphi^k c_\beta^j + a_{ij} \frac{\partial c_\beta^j}{\partial q^k} \varphi^k c_\alpha^i + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} \varphi^i c_\alpha^j c_\beta^k \right) \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned}
& + a_{ij} \frac{\partial c_\alpha^j}{\partial q^k} \varphi^i c_\beta^k + a_{ij} \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} c_\beta^k c_\alpha^j \Big) \dot{\pi}^\beta + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} \varphi^k c_\alpha^j + a_{ij} \frac{\partial c_\alpha^j}{\partial q^k} \varphi^k \right) \varphi^i \\
& + a_{ij} c_\alpha^j \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} \varphi^k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T^*}{\partial q^k} c_\alpha^k &= \left(\frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} c_\gamma^i c_\beta^j \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma + a_{ij} \frac{\partial c_\beta^j}{\partial q^k} c_\gamma^i \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} c_\beta^j \varphi^i \dot{\pi}^\beta + a_{ij} \frac{\partial c_\beta^j}{\partial q^k} \varphi^i \dot{\pi}^\beta \right. \\
& \left. + a_{ij} \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} c_\beta^j \dot{\pi}^\beta + \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} \varphi^i \varphi^j + a_{ij} \frac{\partial \varphi^j}{\partial q^k} \varphi^i \right) c_\alpha^k.
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Сада се, имајући у виду (1.49), (1.51) и (1.52), може писати

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta} \ddot{\pi}^\beta &+ c_\gamma^k \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} c_\alpha^i c_\beta^j + a_{ij} \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^k} c_\beta^j + a_{ij} \frac{\partial c_\beta^j}{\partial q^k} c_\alpha^i \right) \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma \\
&+ \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} \varphi^k c_\alpha^i c_\beta^j + a_{ij} \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^k} \varphi^k c_\beta^j + a_{ij} \frac{\partial c_\beta^j}{\partial q^k} \varphi^k c_\alpha^i + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} \varphi^i c_\alpha^j c_\beta^k \right. \\
&+ a_{ij} \frac{\partial c_\alpha^j}{\partial q^k} \varphi^i c_\beta^k + a_{ij} \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} c_\beta^k c_\alpha^j \Big) \dot{\pi}^\beta + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} \varphi^k c_\alpha^j + a_{ij} \frac{\partial c_\alpha^j}{\partial q^k} \varphi^k \right) \varphi^i \\
&+ a_{ij} c_\alpha^j \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} \varphi^k - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} c_\gamma^i c_\beta^j \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma + a_{ij} \frac{\partial c_\beta^j}{\partial q^k} c_\gamma^i \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} c_\beta^j \varphi^i \dot{\pi}^\beta \right. \\
&+ a_{ij} \frac{\partial c_\beta^j}{\partial q^k} \varphi^i \dot{\pi}^\beta + a_{ij} \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} c_\beta^j \dot{\pi}^\beta + \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} \varphi^i \varphi^j + a_{ij} \frac{\partial \varphi^j}{\partial q^k} \varphi^i \Big) c_\alpha^k \\
&+ a_{ij} c_\gamma^j \left(\frac{\partial c_\beta^i}{\partial q^k} c_\alpha^k - \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^k} c_\beta^k \right) \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma + a_{ij} c_\gamma^j \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} c_\alpha^k - \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^k} \varphi^k \right) \dot{\pi}^\gamma \\
&+ a_{ij} \varphi^j \left(\frac{\partial c_\gamma^i}{\partial q^k} c_\alpha^k - \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^k} c_\gamma^k \right) \dot{\pi}^\gamma + a_{ij} \varphi^j \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} c_\alpha^k - \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^k} \varphi^k \right) = Q_\alpha^*.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Форма (1.53), после трансформације појединих чланова и краћег сређивања, добија облик (1.34), чиме је доказана потпуна еквивалентност форми (1.34) и (1.49).

1.1.2 Мацијеве једначине

Мацијеве једначине, као што је речено, имају облик (1.48). Оно што је овде битно истаћи је да једначине нехолономних веза нису директно садржане у њима. Дакле, Мацијеве једначине се своде на облик (1.49) ако се у њима, након формирања, изврши трансформација свих генерализаних брзина $\dot{q}^i = c_\alpha^i \dot{\pi}^\alpha + \varphi^i$.

1.1.3 Волтерине једначине

Волтерине (*V. Volterra*) једначине су изведене, као што је познато, када се за геометријски независне координате, које одређују положај система у конфигурационом простору V_n , изаберу управо независне Декартове координате ξ^i тачака система, док су компоненте брзина $\dot{\xi}^i$ представљене, у опшем случају, нехомогеном линеарном формом независних квазибрзина

$$\dot{\xi}^i = c_\alpha^i \dot{\pi}^\alpha + \varphi^i. \quad (1.54)$$

Кинетичка енергија система је

$$T = \frac{1}{2} A_{ij} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j, \quad (1.55)$$

где су $A_{ij} = \delta_{ij} \sqrt{m_i m_j}$, односно, у складу са (1.54)

$$T^* = T_{(\dot{\xi}^i = c_\alpha^i \dot{\pi}^\alpha + \varphi^i)} = \frac{1}{2} A_{ij} c_\alpha^i c_\beta^j \dot{\pi}^\alpha \dot{\pi}^\beta + A_{ij} \varphi^i c_\beta^j \dot{\pi}^\beta + \frac{1}{2} A_{ij} \varphi^i \varphi^j. \quad (1.56)$$

Полазећи од Лагранж–Даламберов принципа написаног сада у облику

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}^i} - \frac{\partial T}{\partial \xi^i} - \Xi_i \right) \delta \xi^i = 0, \quad (1.57)$$

где су $\delta \xi^i = c_\alpha^i \delta \pi^\alpha$ сагласно принципу Херца–Хелдера, добија се m једначина ако се има у виду да су варијације $\delta \pi^\alpha$ независне

$$c_\alpha^i \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}^i} - c_\alpha^i \frac{\partial T}{\partial \xi^i} = c_\alpha^i \Xi_i, \quad (1.58)$$

где су Ξ_i генералисане силе које одговарају геометријски независним Декартовим координатама ξ^i . Како је на основу (1.56)

$$\frac{\partial T}{\partial \xi^i} = 0, \quad (1.59)$$

једначине (1.58) добијају облик

$$c_\alpha^i \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}^i} = \Xi_\alpha^*, \quad (1.60)$$

где су $\Xi_\alpha^* = c_\alpha^i \Xi_i$. На основу (1.54)–(1.60), можемо формирати m диференцијалних једначина кретања, познате под називом Волтерине једначине

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}^\alpha} - A_{ij} c_\beta^j c_\gamma^k \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial \xi^k} \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma - 2A_{ij} c_\beta^j \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial \xi^k} \varphi^k \dot{\pi}^\beta - A_{ij} \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial \xi^k} \varphi^k \varphi^j = \Xi_\alpha^*, \quad (1.61)$$

док за случај да су нехолономне везе хомогене [Čović, 1976], диференцијалне једначине (1.61) добијају следећи облик

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}^\alpha} - A_{ij} c_\beta^j c_\gamma^k \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial \xi^k} \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma = \Xi_\alpha^*. \quad (1.62)$$

Како бисмо доказали еквивалентност форми (1.61) и (1.49), неопходно је најпре извршити трансформацију променљивих

$$\xi^i = u_k^i q^k, \quad (1.63)$$

где су $u_k^i = u_k^i(\mathbf{q})$ елементи матрице трансформације, под условом да је, као што је речено, $\text{rang}[\partial \xi^i / \partial q^j] = n$. Хомогена линеарна трансформација променљивих (1.63) је реална и само о таквим трансформацијама ће убудуће бити речи. Како је на основу (1.63) $\dot{\xi}^i = \dot{\xi}^i(\mathbf{q})$, пишемо

$$\dot{\xi}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial q^k} \dot{q}^k = a_k^i \dot{q}^k, \quad (1.64)$$

док се релација између коефицијената a_k^i и u_k^i може успоставити непосредним диференцирањем по времену (1.63), имајући у виду (1.64)

$$a_k^i = u_k^i + \frac{\partial u_j^i}{\partial q^k} q^j. \quad (1.65)$$

У складу са (1.57) и (1.64) пишемо

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}^i} - \frac{\partial T}{\partial \xi^i} - \Xi_i \right) a_k^i \delta q^k = 0, \quad (1.66)$$

односно, у складу са принципом Херца–Хелдера

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}^i} - \frac{\partial T}{\partial \xi^i} - \Xi_i \right) a_k^i c_\alpha^k \delta \pi^\alpha = 0. \quad (1.67)$$

На основу (1.67), имајући у виду да су варијације $\delta \pi^\alpha$ независне, добија се m једначина

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}^i} - \frac{\partial T}{\partial \xi^i} - \Xi_i \right) a_k^i c_\alpha^k = 0. \quad (1.68)$$

Чланови једначина (1.68), у складу са (1.54), (1.55) и (1.56), могу се трансформисати, респективно, користећи следеће релације

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}^i} a_k^i c_\alpha^k = \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial \xi^i} \left(\dot{a}_k^i c_\alpha^k + a_k^i \dot{c}_\alpha^k \right), \quad (1.69)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi^i} a_k^i c_\alpha^k = c_\alpha^k \frac{\partial T^*}{\partial q^k} - \frac{\partial T}{\partial \xi^i} c_\alpha^k \left(\frac{\partial a_r^i}{\partial q^k} c_\beta^r \dot{\pi}^\beta + \frac{\partial c_\beta^r}{\partial q^k} a_r^i \dot{\pi}^\beta + \frac{\partial \varphi^r}{\partial q^k} a_r^i + \frac{\partial a_r^i}{\partial q^k} \varphi^r \right), \quad (1.70)$$

$$\Xi_i a_k^i c_\alpha^k = Q_k c_\alpha^k = Q_\alpha^*, \quad Q_k = \Xi_i a_k^i. \quad (1.71)$$

Сада се, на основу (1.68)–(1.71) као и после трансформације појединих чланова и краћег сређивања, добија облик (1.49), чиме је доказана потпуна еквивалентност форми (1.61) и (1.49).

1.1.4 Вороњчеве једначине

Вороњчеве (*P.V. Voronets*) једначине су изведене у односу на стварне генералисане брзине $\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$ и генералисане координате q^1, \dots, q^n , узимајући у обзир и једначине веза при њиховом формирању. Наиме, полазећи од (1.47), можемо писати

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i \right) \delta q^i = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} - Q_\alpha \right) \delta q^\alpha + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial T}{\partial q^\nu} - Q_\nu \right) \delta q^\nu = 0. \quad (1.72)$$

Како су на основу принципа Херца–Хелдера и једначина веза (1.8)

$$\delta q^\nu = b_\alpha^\nu \delta q^\alpha, \quad (1.73)$$

једначина (1.72) добија облик

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} + b_\alpha^\nu \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} - b_\alpha^\nu \frac{\partial T}{\partial q^\nu} - Q_\alpha - b_\alpha^\nu Q_\nu \right) \delta q^\alpha = 0, \quad (1.74)$$

односно, ако се има у виду да су варијације δq^α независне, добија се m једначина

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} + b_\alpha^\nu \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} - b_\alpha^\nu \frac{\partial T}{\partial q^\nu} - Q_\alpha - b_\alpha^\nu Q_\nu = 0. \quad (1.75)$$

Поједини чланови једначина (1.75) могу се трансформисати користећи следеће релације

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\nu} \frac{\partial \dot{q}^\nu}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} + b_\alpha^\nu \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\nu}, \quad (1.76)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\nu} \right) b_\alpha^\nu - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\nu} \left(\frac{\partial b_\alpha^\nu}{\partial q^\beta} \dot{q}^\beta + \frac{\partial b_\alpha^\nu}{\partial q^\rho} \dot{q}^\rho \right), \quad (1.77)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial T^*}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\nu} \frac{\partial b_\beta^\nu}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\beta - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\nu} \frac{\partial b^\nu}{\partial q^\alpha}, \quad (1.78)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q^\nu} = \frac{\partial T^*}{\partial q^\nu} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\rho} \frac{\partial b_\beta^\rho}{\partial q^\nu} \dot{q}^\beta - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\rho} \frac{\partial b^\rho}{\partial q^\nu}, \quad (1.79)$$

ако се има у виду да је

$$T^* = T_{(\dot{q}^\nu = b_\alpha^\nu \dot{q}^\alpha + b^\nu)}. \quad (1.80)$$

Коначно, имајући у виду (1.75)–(1.80), можемо формирати Вороњчеве једначине

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial q^\nu} b_\alpha^\nu - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\nu} \left(\sigma_{\alpha\beta}^\nu \dot{q}^\beta + \sigma_\alpha^\nu \right) = \tilde{Q}_\alpha, \quad (1.81)$$

где су:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\nu} = \frac{\partial b_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{\beta}} + \frac{\partial b_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{\rho}} b_{\beta}^{\rho} - \frac{\partial b_{\beta}^{\nu}}{\partial q^{\alpha}} - \frac{\partial b_{\beta}^{\nu}}{\partial q^{\rho}} b_{\alpha}^{\rho}, \quad \sigma_{\alpha}^{\nu} = \frac{\partial b_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{\rho}} b^{\rho} - \frac{\partial b^{\nu}}{\partial q^{\alpha}} - \frac{\partial b^{\nu}}{\partial q^{\rho}} b_{\alpha}^{\rho}, \quad (1.82)$$

$$\tilde{Q}_{\alpha} = Q_{\alpha} + Q_{\nu} b_{\alpha}^{\nu},$$

док за случај да су нехолономне везе хомогене [Čović, 1976], добија се да су $\sigma_{\alpha}^{\nu} = 0$.

У наставку биће приказан поступак доказа којим се потврђује еквивалентност форми (1.81) и (1.49). У том циљу, неопходно је извршити трансформацију свих чланова форме (1.81) у сагласности са (1.15), (1.16), (1.22) и (1.29). Не умањујући општост даљег излагања, а у циљу једноставнијег доказа, узмимо за коефицијенте c_{β}^{α}

$$c_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha}, \quad (1.83)$$

па су

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{\alpha}} = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}^{\beta}} \frac{\partial \dot{\pi}^{\beta}}{\partial \dot{q}^{\alpha}} = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}^{\beta}} d_{\alpha}^{\beta} = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}^{\alpha}}, \quad (1.84)$$

где су $d_{\alpha}^{\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha}$, ако се има у виду (1.83), као и да су $d_{\beta}^{\gamma} c_{\gamma}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha}$. Други и трећи члан једначина (1.81) збирно се могу приказати у следећем облику

$$\frac{\partial T^*}{\partial q^{\alpha}} + \frac{\partial T^*}{\partial q^{\nu}} b_{\alpha}^{\nu} = \frac{\partial T^*}{\partial q^{\beta}} \delta_{\alpha}^{\beta} + \frac{\partial T^*}{\partial q^{\nu}} b_{\alpha}^{\nu} = \frac{\partial T^*}{\partial q^k} c_{\alpha}^k, \quad (1.85)$$

док се $\sigma_{\alpha\beta}^{\nu}, \sigma_{\alpha}^{\nu}$ и \tilde{Q}_{α} , у складу са (1.82) и (1.83), респективно могу приказати у следећем облику

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{\nu} &= \frac{\partial b_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{\beta}} + \frac{\partial b_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{\rho}} b_{\beta}^{\rho} - \frac{\partial b_{\beta}^{\nu}}{\partial q^{\alpha}} - \frac{\partial b_{\beta}^{\nu}}{\partial q^{\rho}} b_{\alpha}^{\rho} = \frac{\partial b_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{\alpha}} \delta_{\beta}^{\alpha} + \frac{\partial b_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{\rho}} b_{\beta}^{\rho} - \frac{\partial b_{\beta}^{\nu}}{\partial q^{\gamma}} \delta_{\alpha}^{\gamma} - \frac{\partial b_{\beta}^{\nu}}{\partial q^{\rho}} b_{\alpha}^{\rho} \\ &= \frac{\partial c_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^k} c_{\beta}^k - \frac{\partial c_{\beta}^{\nu}}{\partial q^r} c_{\alpha}^r, \end{aligned} \quad (1.86)$$

$$\sigma_{\alpha}^{\nu} = \frac{\partial b_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{\rho}} b^{\rho} - \frac{\partial b^{\nu}}{\partial q^{\alpha}} - \frac{\partial b^{\nu}}{\partial q^{\rho}} b_{\alpha}^{\rho} = \frac{\partial c_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{\rho}} \varphi^{\rho} - \frac{\partial \varphi^{\nu}}{\partial q^{\alpha}} - \frac{\partial \varphi^{\nu}}{\partial q^{\rho}} c_{\alpha}^{\rho} = \frac{\partial c_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^k} \varphi^k - \frac{\partial \varphi^{\nu}}{\partial q^k} c_{\alpha}^k,$$

$$\tilde{Q}_{\alpha} = Q_{\beta} \delta_{\alpha}^{\beta} + Q_{\nu} b_{\alpha}^{\nu} = Q_{\beta} c_{\alpha}^{\beta} + Q_{\nu} c_{\alpha}^{\nu} = Q_k c_{\alpha}^k = Q_{\alpha}^*.$$

Како су на основу (1.82) $\sigma_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0$ и $\sigma_{\alpha}^{\gamma} = 0$, четврти члан једначина (1.81) можемо представити на следећи начин, у складу са претходно наведеним

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\nu}} (\sigma_{\alpha\beta}^{\nu} \dot{q}^{\beta} + \sigma_{\alpha}^{\nu}) &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \left[\left(\frac{\partial c_{\alpha}^i}{\partial q^k} c_{\beta}^k - \frac{\partial c_{\beta}^i}{\partial q^r} c_{\alpha}^r \right) \dot{q}^{\beta} + \frac{\partial c_{\alpha}^i}{\partial q^k} \varphi^k - \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} c_{\alpha}^k \right] \\ &= a_{ij} c_{\gamma}^j \left(\frac{\partial c_{\alpha}^i}{\partial q^k} c_{\beta}^k - \frac{\partial c_{\beta}^i}{\partial q^r} c_{\alpha}^r \right) \dot{\pi}^{\beta} \dot{\pi}^{\gamma} + a_{ij} c_{\beta}^j \left(\frac{\partial c_{\alpha}^i}{\partial q^k} \varphi^k - \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} c_{\alpha}^k \right) \dot{\pi}^{\beta} \quad (1.87) \\ &+ a_{ij} \varphi^j \left(\frac{\partial c_{\alpha}^i}{\partial q^k} c_{\gamma}^k - \frac{\partial c_{\gamma}^i}{\partial q^r} c_{\alpha}^r \right) \dot{\pi}^{\gamma} + a_{ij} \varphi^j \left(-\frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} c_{\alpha}^k + \frac{\partial c_{\alpha}^i}{\partial q^k} \varphi^k \right). \end{aligned}$$

Узимајући у обзир (1.81)–(1.87), као и после краћег сређивања, коначно се добија облик (1.49), чиме је доказана потпуна еквивалентност форми (1.81) и (1.49).

1.1.5 Чаплигинове једначине

Чаплигинове (руски: *Серге́й Алексе́евич Чаплы́гин* , енглески: *Sergey Alexeyevich Chaplygin, 1869-1942*) једначине представљају специјалан случај Вороњчевих једначина. Оно што карактерише Чаплигинове системе је то да $T, T^*, \Pi, b_{\alpha}^{\nu}, b^{\nu}$ и Q_i не зависе од координата које одговарају зависним брзинама (тј. не зависе од q^{ν}). Полазећи од (1.81), имајући у виду речено, можемо писати

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{\alpha}} - \frac{\partial T^*}{\partial q^{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\nu}} (\sigma_{\alpha\beta}^{\nu} \dot{q}^{\beta} + \sigma_{\alpha}^{\nu}) = \tilde{Q}_{\alpha}, \quad (1.88)$$

где су сада:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\nu} = \frac{\partial b_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{\beta}} - \frac{\partial b_{\beta}^{\nu}}{\partial q^{\alpha}}, \quad \sigma_{\alpha}^{\nu} = -\frac{\partial b^{\nu}}{\partial q^{\alpha}}, \quad \tilde{Q}_{\alpha} = Q_{\alpha} + Q_{\nu} b_{\alpha}^{\nu}, \quad (1.89)$$

док за случај да су нехолономне везе хомогене [Čović, 1976], добија се да су $\sigma_{\alpha}^{\nu} = 0$.

1.1.6 Генералисане Волтерине једначине

Иако су назване по Волтеру, генералисане Волтерине једначине извео је Вороњец. У општем случају, све независне генералисане брзине могу се изразити као линеарна форма независних квазибрзина (кинематичких параметара)

$$\dot{x}^\beta = c_\alpha^\beta \dot{\theta}^\alpha, \quad (1.90)$$

док се зависне генералисане брзине, узимајући у обзир једначине нехолономних веза

$$\dot{x}^\nu = b_\beta^\nu \dot{x}^\beta + b^\nu, \quad (1.91)$$

могу изразити у следећем облику

$$\dot{x}^\nu = c_\alpha^\nu \dot{\theta}^\alpha + b^\nu. \quad (1.92)$$

Сада се, имајући у виду (1.90) и (1.92), све генералисане брзине могу изразити као

$$\dot{x}^i = c_\alpha^i \dot{\theta}^\alpha + \omega^i, \quad (1.93)$$

где су $\omega^\alpha = 0$ и $\omega^\nu = b^\nu$, што је у сагласности са (1.90) и (1.92). Независне квазибрзине $\dot{\theta}^\alpha$, из релације (1.90), могу се изразити у следећем облику

$$\dot{\theta}^\alpha = d_\beta^\alpha \dot{x}^\beta, \quad (1.94)$$

где су $c_\gamma^\alpha d_\beta^\gamma = \delta_\beta^\alpha$. Сагласно принципу Херца–Хелдера, на основу (1.93), пишемо

$$\delta x^i = c_\alpha^i \delta \theta^\alpha. \quad (1.95)$$

Полазећи од Лагранж–Даламберовог принципа, у складу са (1.95), пишемо

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} - Q_i \right) \delta x^i = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} - Q_i \right) c_\alpha^i \delta \theta^\alpha = 0, \quad (1.96)$$

одакле можемо, имајући у виду да су варијације $\delta \theta^\alpha$ независне, формирати m једначина

$$c_\alpha^i \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - c_\alpha^i \frac{\partial T}{\partial x^i} = Q_\alpha^*, \quad (1.97)$$

где су $Q_\alpha^* = Q_i c_\alpha^i$. Кинетичка енергија система је

$$T = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j, \quad (1.98)$$

док је

$$T^* = T_{(\dot{x}^i = c_\alpha^i \dot{\zeta}^\alpha + \omega^i)} = \frac{1}{2} a_{ij} c_\alpha^i c_\beta^j \dot{\zeta}^\alpha \dot{\zeta}^\beta + a_{ij} \omega^i c_\beta^j \dot{\zeta}^\beta + \frac{1}{2} a_{ij} \omega^i \omega^j. \quad (1.99)$$

Први и други члан једначина (1.97), у складу са (1.93), (1.98) и (1.99), респективно можемо трансформисати користећи следеће релације

$$c_\alpha^i \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\theta}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\beta} \frac{\partial c_\alpha^\beta}{\partial x^j} (c_\gamma^j \dot{\theta}^\gamma + \omega^j) - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\nu} \frac{\partial c_\alpha^\nu}{\partial x^j} (c_\gamma^j \dot{\theta}^\gamma + \omega^j), \quad (1.100)$$

$$c_\alpha^i \frac{\partial T}{\partial x^i} = \frac{\partial T^*}{\partial x^i} c_\alpha^i - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\beta} \left(\frac{\partial c_\gamma^\beta}{\partial x^i} \dot{\theta}^\gamma + \frac{\partial \omega^\beta}{\partial x^i} \right) c_\alpha^i - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\nu} \left(\frac{\partial c_\gamma^\nu}{\partial x^i} \dot{\theta}^\gamma + \frac{\partial \omega^\nu}{\partial x^i} \right) c_\alpha^i, \quad (1.101)$$

па се на основу (1.97), (1.100) и (1.101) добија

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\theta}^\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial x^k} c_\alpha^k - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \left(\frac{\partial c_\alpha^i}{\partial x^r} \dot{x}^r + \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial t} \right) + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^k} c_\alpha^k = Q_\alpha^*. \quad (1.102)$$

Како су

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\beta} = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\theta}^\alpha} d_\beta^\alpha - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\nu} c_\alpha^\nu d_\beta^\alpha, \quad (1.103)$$

коначно се могу формирати генералисане Волтерине једначине

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\theta}^\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial x^i} c_\alpha^i - \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\theta}^\alpha} \left(\frac{\partial c_\alpha^\beta}{\partial x^j} c_\gamma^j \dot{\theta}^\gamma + \frac{\partial c_\alpha^\beta}{\partial x^j} \omega^j - \frac{\partial c_\gamma^\beta}{\partial x^i} c_\alpha^i \dot{\theta}^\gamma - \frac{\partial \omega^\beta}{\partial x^i} c_\alpha^i \right) d_\beta^\alpha \\ & - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\nu} \left(\frac{\partial c_\alpha^\nu}{\partial x^j} c_\gamma^j \dot{\theta}^\gamma + \frac{\partial c_\alpha^\nu}{\partial x^j} \omega^j - \frac{\partial c_\gamma^\nu}{\partial x^i} c_\alpha^i \dot{\theta}^\gamma - \frac{\partial \omega^\nu}{\partial x^i} c_\alpha^i \right) \\ & + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\nu} c_\alpha^\nu d_\beta^\alpha \left(\frac{\partial c_\alpha^\beta}{\partial x^j} c_\gamma^j \dot{\theta}^\gamma + \frac{\partial c_\alpha^\beta}{\partial x^j} \omega^j - \frac{\partial c_\gamma^\beta}{\partial x^i} c_\alpha^i \dot{\theta}^\gamma - \frac{\partial \omega^\beta}{\partial x^i} c_\alpha^i \right) = Q_\alpha^*, \end{aligned} \quad (1.104)$$

док за случај да су нехолономне везе хомогене [Čović, 1976], добијамо

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\theta}^\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial x^i} c_\alpha^i - \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\theta}^\alpha} \left(\frac{\partial c_\alpha^\beta}{\partial x^j} c_\gamma^j \dot{\theta}^\gamma - \frac{\partial c_\gamma^\beta}{\partial x^i} c_\alpha^i \dot{\theta}^\gamma \right) d_\beta^\alpha \\ & - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\nu} \left(\frac{\partial c_\alpha^\nu}{\partial x^j} c_\gamma^j \dot{\theta}^\gamma - \frac{\partial c_\gamma^\nu}{\partial x^i} c_\alpha^i \dot{\theta}^\gamma \right) + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\nu} c_\alpha^\nu d_\beta^\alpha \left(\frac{\partial c_\alpha^\beta}{\partial x^j} c_\gamma^j \dot{\theta}^\gamma - \frac{\partial c_\gamma^\beta}{\partial x^i} c_\alpha^i \dot{\theta}^\gamma \right) = Q_\alpha^*. \end{aligned} \quad (1.105)$$

Еквивалентност форми (1.104) и (1.49) може се доказати полазећи од генералисаних Волтериних једначина у облику (1.102). Трећи и четврти члан, у складу са претходно реченим, респективно се могу трансформисати на следећи начин

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial x^r} \dot{x}^r = a_{ij} \left[\left(c_\gamma^j c_\beta^r \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^r} \dot{\pi}^\beta + c_\gamma^r \varphi^j \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^r} + c_\gamma^j \varphi^k \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^k} \right) \dot{\pi}^\gamma + \varphi^j \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^k} \varphi^k \right], \quad (1.106)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^k} c_\alpha^k = a_{ij} \left[c_\gamma^j \frac{\partial c_\beta^i}{\partial q^k} \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma + \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} c_\gamma^j + \frac{\partial c_\gamma^i}{\partial q^k} \varphi^j \right) \dot{\pi}^\gamma + \varphi^j \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} \right] c_\alpha^k. \quad (1.107)$$

На основу (1.102), (1.106) и (1.107), као и после краћег сређивања, коначно се добија облик (1.49), чиме је доказана потпуна еквивалентност форми (1.104) и (1.49).

1.1.7 Ферерсове једначине

Ферерсове (*N. M. Ferrers*) једначине су у основи исте као и Волтерине једначине у Декатровим координатама

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}^\alpha} - \left(\delta_{ij} \sqrt{m_i m_j} \xi^j \right) \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial \xi^k} \dot{\xi}^k = \Xi_\alpha^*. \quad (1.108)$$

1.1.8 Болцман–Хамелове једначине

Болцман–Хамелове (*Ludwig Eduard Boltzmann, 1844-1906; Georg Karl Wilhelm Hamel, 1877-1954*) једначине формираћемо увођењем квазибрзина на следећи начин

$$\dot{\pi}^\alpha = d_i^\alpha \dot{q}^i, \quad (1.109)$$

$$\dot{\pi}^\nu = B_i^\nu \dot{q}^i + B^\nu = 0, \quad (1.110)$$

где је последња релација у сагласности са (1.3). Све квазибрзине, на основу релација (1.109) и (1.110), можемо изразити и на следећи начин

$$\dot{\pi}^k = d_i^k \dot{q}^i + B^k, \quad (1.111)$$

где су

$$d_i^\alpha \equiv d_i^\alpha \text{ и } d_i^\nu = B_i^\nu, \quad (1.112)$$

док су

$$B^\alpha = 0 \text{ и } B^\nu \equiv B^\nu. \quad (1.113)$$

Сада се, под условим да је $\det[d_i^k] \neq 0$, где је $[d_i^k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, све генералисане брзине из релације (1.111) могу изразити у следећем облику

$$\dot{q}^i = c_r^i \dot{\pi}^r + \varphi^i, \quad (1.114)$$

где су

$$c_r^i d_i^k = \delta_r^k \quad \text{и} \quad \varphi^i = -\delta_r^i B^r. \quad (1.115)$$

Имајући у виду (1.22) и (1.114), израз за кинетичку енергију система у функцији свих квазибрзина добија облик

$$\tilde{T} = T_{(q^i = c_r^i \dot{\pi}^r + \varphi^i)} = \frac{1}{2} a_{ij} c_k^i c_r^j \dot{\pi}^k \dot{\pi}^r + a_{ij} \varphi^i c_r^j \dot{\pi}^r + \frac{1}{2} a_{ij} \varphi^i \varphi^j. \quad (1.116)$$

Полазећи од Лагранж–Даламберовог принципа (1.47), сагласно принципу Херца–Хелдера ($\delta q^i = c_r^i \delta \pi^r$), можемо писати

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i \right) \delta q^i &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i \right) c_\alpha^i \delta \pi^\alpha \\ &+ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i \right) c_\nu^i \delta \pi^\nu = 0. \end{aligned} \quad (1.117)$$

Како су на основу (1.110) $\delta \pi^\nu = 0$, једначина (1.117) добија облик

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i \right) c_\alpha^i \delta \pi^\alpha = 0, \quad (1.118)$$

одакле се, имајући у виду да су варијације $\delta \pi^\alpha$ независне, добија m једначина

$$c_\alpha^i \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - c_\alpha^i \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_\alpha^*, \quad (1.119)$$

где су $Q_\alpha^* = Q_i c_\alpha^i$. Чланови једначина (1.119), у складу са (1.22), (1.114) и (1.116), могу се трансформисати користећи следеће релације

$$c_\alpha^i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}^\alpha}, \quad (1.120)$$

$$c_\alpha^i \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}^\alpha} - \dot{c}_\alpha^i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}, \quad (1.121)$$

$$c_\alpha^i \frac{\partial T}{\partial q^i} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^i} c_\alpha^i - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^k} \left(\frac{\partial c_\alpha^k}{\partial q^i} \dot{\pi}^s + \frac{\partial \varphi^k}{\partial q^i} \right) c_\alpha^i, \quad (1.122)$$

на основу којих се, после краћег сређивања, добијају Болцман–Хамелове једначине кретања

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}^\alpha} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^i} c_\alpha^i - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}^s} d_k^s \left(\frac{\partial c_\alpha^k}{\partial q^r} c_\beta^r - \frac{\partial c_\beta^k}{\partial q^i} c_\alpha^i \right) \dot{\pi}^\beta \\ - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}^s} d_k^s \left(\frac{\partial c_\alpha^k}{\partial q^r} \varphi^r - \frac{\partial \varphi^k}{\partial q^i} c_\alpha^i \right) = Q_\alpha^*, \end{aligned} \quad (1.123)$$

односно

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}^\alpha} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^i} c_\alpha^i - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}^s} c_\alpha^i c_\beta^r \left(\frac{\partial d_r^s}{\partial q^i} - \frac{\partial d_i^s}{\partial q^r} \right) \dot{\pi}^\beta \\ + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}^s} c_\alpha^i \left(\frac{\partial d_i^s}{\partial q^r} \varphi^r + \frac{\partial \varphi^k}{\partial q^i} d_k^s \right) = Q_\alpha^*, \end{aligned} \quad (1.124)$$

при чему се у свим изразима после првог диференцирања ставља да су $\dot{\pi}^\nu = 0$.

За случај да су нехолономне везе хомогене [Čović, 1976], једначине (1.124) постају

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}^\alpha} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^i} c_\alpha^i - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}^s} c_\alpha^i c_\beta^r \left(\frac{\partial d_r^s}{\partial q^i} - \frac{\partial d_i^s}{\partial q^r} \right) \dot{\pi}^\beta = Q_\alpha^*. \quad (1.125)$$

У циљу доказа еквивалентности форми (1.123) и (1.49), трећи и четврти члан форме (1.123) респективно се може трансформисати користећи следеће релације

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}^s} d_k^s \left(\frac{\partial c_\alpha^k}{\partial q^r} c_\beta^r - \frac{\partial c_\beta^k}{\partial q^i} c_\alpha^i \right) \dot{\pi}^\beta = a_{ij} c_\gamma^j \left(\frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^r} c_\beta^r - \frac{\partial c_\beta^i}{\partial q^k} c_\alpha^k \right) \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma \\ + a_{ij} \varphi^j \left(\frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^r} c_\gamma^r - \frac{\partial c_\gamma^i}{\partial q^k} c_\alpha^k \right) \dot{\pi}^\gamma, \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}^s} d_k^s \left(\frac{\partial c_\alpha^k}{\partial q^r} \varphi^r - \frac{\partial \varphi^k}{\partial q^i} c_\alpha^i \right) = \\ a_{ij} c_\gamma^j \left(\frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^r} \varphi^r - \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} c_\alpha^k \right) \dot{\pi}^\gamma + a_{ij} \varphi^j \left(\frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^r} \varphi^r - \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} c_\alpha^k \right), \end{aligned} \quad (1.126)$$

ако се има у виду да су

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}^s} = a_{ij} c_s^i \left(c_\gamma^j \dot{\pi}^\gamma + \varphi^j \right). \quad (1.127)$$

Тиме је доказана еквивалентност форми (1.123) и (1.49).

1.1.9 Апелове једначине

У циљу формирања Апелових (*Paul Appell, 1855-1930*) једначина кретања, дефинишимо Апелову функцију убрзања

$$S = \frac{1}{2} a_{ij} a^i a^j, \quad (1.128)$$

имајући у виду да су

$$a^i = c_\alpha^i \ddot{\pi}^\alpha + c_\beta^r \left(\frac{\partial c_\alpha^i}{\partial q^r} + \Gamma_{kr}^i c_\alpha^k \right) \dot{\pi}^\alpha \dot{\pi}^\beta + \left(\frac{\partial c_\beta^i}{\partial q^r} \varphi^r + \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^r} c_\beta^r + 2\Gamma_{kr}^i c_\beta^r \varphi^k \right) \dot{\pi}^\beta + \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial q^r} + \Gamma_{kr}^i \varphi^k \right) \varphi^r. \quad (1.129)$$

Полазећи, као и до сада, од Лагранж–Даламберовог принципа (1.47), сагласно принципу Херца–Хелдера ($\delta q^i = c_\alpha^i \delta \pi^\alpha$), можемо писати

$$a_{ij} \left(a^i - Q^i \right) \delta q^j = \left(a_{ij} a^i - Q_j \right) c_\alpha^j \delta \pi^\alpha = 0. \quad (1.130)$$

Како су варијације $\delta \pi^\alpha$ независне, из (1.130) добијамо m једначина облика

$$c_\alpha^j a_{ij} a^i = Q_\alpha^*, \quad (1.131)$$

где су $Q_\alpha^* = Q_i c_\alpha^i$. Како су на основу (1.129)

$$c_\alpha^j = \frac{\partial a^j}{\partial \dot{\pi}^\alpha}, \quad (1.132)$$

у складу са (1.128) и (1.132), можемо писати

$$c_\alpha^j a_{ij} a^i = \frac{\partial S}{\partial \dot{\pi}^\alpha}. \quad (1.133)$$

Коначно, имајући у виду (1.131) и (1.133), Апелове једначине гласе

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}^\alpha} = Q_\alpha^* . \quad (1.134)$$

Апелове једначине у односу на стварне генералисане брзине $\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$ и генералисане координате q^1, \dots, q^n , могуће је, такође, извести²⁴ полазећи од Лагранж–Даламберовог принципа

$$a_{ij} (a^i - Q^i) \delta q^j = a_{i\alpha} (a^i - Q^i) \delta q^\alpha + a_{iv} (a^i - Q^i) \delta q^v = 0, \quad (1.135)$$

где су

$$a^i = \ddot{q}^i + \Gamma_{kr}^i \dot{q}^k \dot{q}^r . \quad (1.136)$$

Како су $\delta q^v = b_\alpha^v \delta q^\alpha$, једначина (1.135) добија облик

$$(a^i - Q^i) (a_{i\beta} \delta_\alpha^\beta + a_{iv} b_\alpha^v) \delta q^\alpha = 0. \quad (1.137)$$

Имајући у виду да су варијације δq^α независне, добија се m једначина

$$(a^i - Q^i) (a_{i\beta} \delta_\alpha^\beta + a_{iv} b_\alpha^v) = 0. \quad (1.138)$$

Једначине (1.138) могуће је записати у следећем облику

$$a^i a_{ij} \tilde{c}_\alpha^j = Q_j \tilde{c}_\alpha^j, \quad (1.139)$$

где су

$$\tilde{c}_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad \tilde{c}_\alpha^v = b_\alpha^v, \quad (1.140)$$

односно

$$a_{ij} a^i \tilde{c}_\alpha^j = \tilde{Q}_\alpha, \quad \tilde{Q}_\alpha = \tilde{c}_\alpha^j Q_j . \quad (1.141)$$

На основу (1.136) можемо писати

$$\frac{\partial a^\beta}{\partial \ddot{q}^\alpha} = \delta_\alpha^\beta, \quad \frac{\partial a^v}{\partial \ddot{q}^\alpha} = b_\alpha^v . \quad (1.142)$$

Последње релације можемо записати и у следећем облику, имајући у виду (1.140)

²⁴ На основу рада проф. др Драгомира Зековића који још није публикован.

$$\frac{\partial a^j}{\partial \ddot{q}^\alpha} = \tilde{c}_\alpha^j. \quad (1.143)$$

Апелова функција у односу на стварна убрзања (1.136) је

$$\tilde{S} = \frac{1}{2} a_{ij} a^i a^j. \quad (1.144)$$

Како су на основу (1.143) и (1.144)

$$a_{ij} a^i \tilde{c}_\alpha^j = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \ddot{q}^\alpha}, \quad (1.145)$$

Апелове једначине у стварним координатама гласе

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \ddot{q}^\alpha} = \tilde{Q}_\alpha. \quad (1.146)$$

У циљу доказа еквивалентности форми (1.134) и (1.34), неопходно је одредити

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}^\alpha} = a_{ij} \left[c_\beta^i \ddot{\pi}^\beta + c_\gamma^k \left(\frac{\partial c_\beta^i}{\partial q^k} + \Gamma_{kr}^i c_\beta^r \right) \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma + \left(\frac{\partial c_\beta^i}{\partial q^k} \varphi^k + \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} c_\beta^k + 2\Gamma_{kr}^i c_\beta^r \varphi^k \right) \dot{\pi}^\beta \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} + \Gamma_{kr}^i \varphi^r \right) \varphi^k \right] c_\alpha^j, \end{aligned} \quad (1.147)$$

односно

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}^\alpha} = G_{\alpha\beta} \ddot{\pi}^\beta + a_{ij} c_\alpha^j c_\gamma^k \left(\frac{\partial c_\beta^i}{\partial q^k} + \Gamma_{kr}^i c_\beta^r \right) \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma \\ + a_{ij} c_\alpha^j \left(\frac{\partial c_\beta^i}{\partial q^k} \varphi^k + \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} c_\beta^k + 2\Gamma_{kr}^i c_\beta^r \varphi^k \right) \dot{\pi}^\beta + a_{ij} c_\alpha^j \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} + \Gamma_{kr}^i \varphi^r \right) \varphi^k = Q_\alpha^*, \end{aligned} \quad (1.148)$$

у складу са (1.128) и (1.129), чиме је уједно и доказана еквивалентност. Еквивалентност форми (1.134) и (1.146) може се доказати уколико се за независне квазибрзине изаберу управо независне генерализане брзине

$$\dot{\pi}^\alpha = \dot{q}^\alpha, \quad (1.149)$$

па су

$$\ddot{\pi}^\alpha = \ddot{q}^\alpha. \quad (1.150)$$

Имајући у виду (1.149) и (1.150), важи

$$\tilde{S} \equiv S, \quad \tilde{Q}_\alpha \equiv Q_\alpha^*, \quad (1.151)$$

чиме је доказана еквивалентност форми (1.134) и (1.146).

1.1.10 Лагранжеве једначине друге врсте са неодређеним множитељима

Диференцијалне једначине кретања нехолономног механичког система променљиве масе, чије кретање ограничавају везе облика (1.8), у форми Лагранжевих једначина друге врсте са неодређеним множитељима су

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i + \Lambda_\nu \frac{\partial \psi^\nu}{\partial \dot{q}^i}, \quad (1.152)$$

односно, имајући у виду (1.8)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} &= Q_\alpha - \Lambda_\nu b_\alpha^\nu, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial T}{\partial q^\nu} &= Q_\nu + \Lambda_\nu. \end{aligned} \quad (1.153)$$

Елиминацијом Лагранжевих множитеља веза Λ_ν из претходних једначина, добијају се следеће једначине

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} - Q_\alpha + b_\alpha^\nu \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial T}{\partial q^\nu} - Q_\nu \right) = 0, \quad (1.154)$$

које се могу записати и у следећем облику

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i \right) \varphi_\alpha^i = 0, \quad (1.155)$$

где су

$$\varphi_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad \varphi_\alpha^\nu = b_\alpha^\nu. \quad (1.156)$$

Једначине (1.155) еквивалентне су диференцијалним једначинама кретања у Мацијевој форми (1.48). Потпуни систем диференцијалних једначина, потребан за

одређивање непознатих функција $q^i = q^i(t)$, добија се када се систему (1.154) придруже нехолономне једначине веза

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} - Q_\alpha + b_\alpha^\nu \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial T}{\partial q^\nu} - Q_\nu \right) = 0, \quad (1.157)$$

$$\dot{q}^\nu = b_\alpha^\nu \dot{q}^\alpha + b^\nu.$$

Диференцијалне једначине кретања реономних механичких система са линеарним нехомогеним нехолономним везама – разне форме и њихова еквивалентност

1.2.1 Уводна разматрања

Основни проблем динамике реономних система састојао се у налажењу таквог простора чија ће метрика, по аналогiji са склерономним системима чија метрика је одређена са (1.38), бити одређена кинетичком енергијом разматраног система. Како кинетичка енергија реономних система експлицитно зависи и од времена, то ће и дужина лука криве у уоченом простору зависити од времена. Сада разматрамо кретање механичког система у проширеном риманском конфигурационом простору V_{n+1} , чије кретање ограничава g холономних веза, као и l нехолономних веза, за које претпостављамо да су линеарне, нестационарне и нехомогене, а које можемо приказати у следећем облику

$$q^{\varkappa} - f^{\varkappa}(\mathbf{q}) = 0, \quad \varkappa = \overline{1, g}, \quad (1.158)$$

$$\psi^V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \equiv B_i^V \dot{q}^{i'} + B^V = 0, \quad (1.159)$$

где су $\mathbf{q} = (q^0, q^1, q^2, \dots, q^n)^T$, $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}^0, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n)^T$, $B_i^V = B_i^V(\mathbf{q}, t)$ и $B^V = B^V(\mathbf{q}, t)$.

У проширеном конфигурационом простору n координата представља n Лагранжевих координата, док је $(n+1)$ -ва координата допунска, односно реономна координата. Не умањујући општост даљег излагања, дефинишимо допунску координату (*реономну координату*) тако да испуњава услов

$$f^0 = q^0(t) - t = 0. \quad (1.160)$$

Из (1.159) види се да нехомогене нехолономне везе и у V_{n+1} -простору остају нехомогене [Jeremić, 1998], а да се у коефицијентима B_i^V и B^V време t појављује експлицитно и после увођења реономне генералисане координате q^0 . Да се не може извршити хомогенизација нехолономних веза, показано је у [Jeremić, 1998]. Положај механичког система у конфигурационом простору V_{n+1} одређен је вектором положаја \vec{r} репрезентативне тачке који представља функцију генералисаних координата \mathbf{q}

$$\vec{r}(\mathbf{q}) = \xi^g \vec{e}_g, \quad (1.161)$$

где су ξ^g уопштене Декартове координате, имајући у виду да се координате свих тачака система могу изразити у функцији генералисаних координата \mathbf{q}

$$\xi^g = \xi^g(\mathbf{q}). \quad (1.162)$$

Једначине нехолономних веза (1.159), можемо сада изразити и у следећем облику

$$\psi^V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \equiv \dot{q}^V - b_\alpha^V \dot{q}^{\alpha'} - b^V = 0, \quad (1.163)$$

где су

²⁵ Индекси сада узимају следеће вредности: $i, j, k, r, s, t = \overline{1, n}$; $i', j', k', r', s', t' = \overline{0, n}$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon = \overline{1, m}$; $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon' = \overline{0, m}$; $\nu, \rho, \mu = \overline{m+1, n}$; $\vartheta, \theta = \overline{1, 3N}$.

²⁶ У општем случају се допунска координата може дефинисати као $f^0 = q^0 - \tau(t) = 0$, где је $\tau(t)$ реална функција времена.

$$b_{\alpha'}^{\nu}(\mathbf{q}, t) = -C_{\rho}^{\nu} B_{\alpha'}^{\rho}, \quad b^{\nu}(\mathbf{q}, t) = -C_{\rho}^{\nu} B^{\rho}, \quad C_{\mu}^{\nu} B_{\rho}^{\mu} = \delta_{\rho}^{\nu}, \quad (1.164)$$

под условом да је $\det[B_{\rho}^{\nu}] \neq 0$. Потребно је водити рачуна о томе да се само оно време које је присутно у једначинама реономних веза и на оним местима где се јавља као последица замене зависних координата помоћу тих веза, може третирати као допунска генералисана координата. Овде ћемо користити формулисани став о постојању „две врсте времена” [Jeremić, 1998], према коме се само време присутно у једначинама реономних веза може посматрати и тумачити као допунска, реономна координата. То даље значи да време које експлицитно фигурише у било којој другој функцији (потенцијалној енергији итд.), то јест време које у те функције није уведено помоћу једначина веза, не може представљати реономну координату!

Узимајући да су $\dot{\pi}^0 \triangleq 1, c_{\alpha'}^0 = \delta_{\alpha'}^0$ и $c_0^{\alpha'} = \delta_0^{\alpha'}$, независне генералисане брзине могу се изразити као хомогена линеарна форма независних квазибрзина $\dot{\pi}^0, \dot{\pi}^1, \dots, \dot{\pi}^m$

$$\dot{q}^{\alpha'} = c_{\beta'}^{\alpha'} \dot{\pi}^{\beta'}, \quad (1.165)$$

ако се има у виду да је $\dot{q}^0 = 1$, где су $c_{\beta'}^{\alpha'} = c_{\beta'}^{\alpha'}(\mathbf{q})$ непрекидне функције са непрекидним првим изводима у области, у којој разматрамо кретање система. Како су $\dot{q}^{\alpha} = c_{\beta}^{\alpha} \dot{\pi}^{\beta}$ са једне стране, док са друге, према (1.165), $\dot{q}^{\alpha} = c_{\beta}^{\alpha} \dot{\pi}^{\beta} + c_0^{\alpha} \dot{\pi}^0$ и $\dot{q}^0 = c_{\beta}^0 \dot{\pi}^{\beta} + c_0^0 \dot{\pi}^0 = 1$, евидентно је да су $c_0^{\alpha'} = \delta_0^{\alpha'}$ и $c_{\alpha'}^0 = \delta_{\alpha'}^0$. Зависне генералисане брзине \dot{q}^{ν} , имајући у виду (1.163) и (1.165), сада се могу изразити у следећем облику

$$\dot{q}^{\nu} = c_{\beta'}^{\nu} \dot{\pi}^{\beta'} + b^{\nu}, \quad (1.166)$$

где су $c_{\beta'}^{\nu}(\mathbf{q}, t) = b_{\alpha'}^{\nu} c_{\beta'}^{\alpha'}$. Све генералисане брине $\dot{q}^{i'}$ могу се изразити као

$$\dot{q}^{i'} = c_{j'}^{i'} \dot{\pi}^{j'} + \varphi^{i'}, \quad (1.167)$$

па уколико, не умањујући општост даљег излагања, за зависне квазибрзине изаберемо једначине нехолономних веза (1.159)

$$\dot{\pi}^{\nu} = B_{i'}^{\nu} \dot{q}^{i'} + B^{\nu} = 0, \quad (1.168)$$

генерализане брине $q^{i'}$ добијају следећи облик

$$\dot{q}^{i'} = c_{\alpha'}^{i'} \dot{\pi}^{\alpha'} + \varphi^{i'}, \quad (1.169)$$

где су $\varphi^{\alpha'} = 0$ и $\varphi^{\nu} = b^{\nu}$, што је у сагласности са (1.165) и (1.166). Узимајући да су $d_{i'}^0 = \delta_{i'}^0$, независне квазибрзине $\dot{\pi}^{\alpha'}$ из (1.167) могу се изразити у следећем облику

$$\dot{\pi}^{\alpha'} = d_{i'}^{\alpha'} (\dot{q}^{i'} - \varphi^{i'}), \quad (1.170)$$

где су $d_{i'}^{\alpha'} c_{\beta'}^{i'} = \delta_{\beta'}^{\alpha'}$. Може се показати да су $d_0^{\alpha} = -d_{\nu}^{\alpha} b_0^{\nu}$. Контраваријантне координате вектора убрзања сада имају следећи облик [Vujičić, 1990]

$$a^{i'} = \ddot{q}^{i'} + \Gamma_{k'r'}^{i'} \dot{q}^{k'} \dot{q}^{r'}, \quad (1.171),$$

где су $\Gamma_{k'r'}^{i'}$, Кристофелови симболи друге врсте у конфигурационом простору V_{n+1} .

Координате $a^{i'}$ вектора убрзања, на основу (1.169), (1.171), као и чињенице да је $\ddot{\pi}^0 = 0$, добијају следећи облик

$$\begin{aligned} a^{i'} &= c_{\alpha'}^{i'} \ddot{\pi}^{\alpha'} + c_{\beta'}^{r'} \left(\frac{\partial c_{\alpha'}^{i'}}{\partial q^{r'}} + \Gamma_{k'r'}^{i'} c_{\alpha'}^{k'} \right) \dot{\pi}^{\alpha'} \dot{\pi}^{\beta'} \\ &+ \left(\frac{\partial c_{\beta'}^{i'}}{\partial q^{r'}} \varphi^{r'} + \frac{\partial c_{\beta'}^{i'}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial q^{r'}} c_{\beta'}^{r'} + 2\Gamma_{k'r'}^{i'} c_{\beta'}^{r'} \varphi^{k'} \right) \dot{\pi}^{\beta'} \\ &+ \left(\frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial q^{r'}} + \Gamma_{k'r'}^{i'} \varphi^{k'} \right) \varphi^{r'} + \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.172)$$

где треба имати у виду да су $\frac{\partial c_{\beta'}^{\alpha'}}{\partial t} = 0$. Кинетичка енергија разматраног система је

$$T = \frac{1}{2} A_{g\theta} \dot{\xi}^g \dot{\xi}^{\theta}, \quad (1.173)$$

где су сада

$$A_{g\theta} (q^0) = \delta_{g\theta} \sqrt{m_g m_{\theta}}, \quad \dot{\xi}^g = \frac{d\xi^g}{dt} = \frac{\partial \xi^g}{\partial q^{i'}} \dot{q}^{i'}, \quad (1.174)$$

при чему тачке $M_p (p=1, \dots, N)$ система, маса m_p , у општем случају могу бити променљиве масе, чији су закони промене познати

$$m_p = m_p(q^0). \quad (1.175)$$

На основу анализе спроведене у [Jeremić, 1998], закључено је да су закони промена маса $m_p = m_p(q^0)$ и $m_p = m_p(t)$ потпуно равноправни у проучавању кретања система променљиве масе. Кинетичка енергија система (1.173), сада добија следећи облик

$$T = \frac{1}{2} a_{i'j'} \dot{q}^{i'} \dot{q}^{j'}, \quad (1.176)$$

где су

$$a_{i'j'}(\mathbf{q}) = A_{g\theta} \frac{\partial \xi^g}{\partial q^{i'}} \frac{\partial \xi^g}{\partial q^{j'}}. \quad (1.177)$$

Из израза (1.176) за кинетичку енергију система, можемо писати

$$2Tdt^2 = a_{i'j'} dq^{i'} dq^{j'}. \quad (1.178)$$

Израз (1.178) може се узети као метричка форма, док је линијски елемент тог простора

$$ds^2 = 2Tdt^2. \quad (1.179)$$

Како је квадратна форма (1.176) позитивно дефинитна, конфигурациони простор V_{n+1} је простор позитивно дефинитне метрике. Значај овог закључка огледа се у томе да се многа тврђења и ставови везани за кретање склерономних механичких система у риманским конфигурационим просторима могу, без посебног доказивања, пренети и на кретање реономних система у проширеном кофигурационом простору. Имајући у виду (1.169), израз за кинетичку енергију система добија следећи облик

$$T^* = T(\dot{q}^{i'} = c_{\alpha'}^{i'} \dot{\pi}^{\alpha'} + \varphi^{i'}) = \frac{1}{2} G_{\alpha'\beta'} \dot{\pi}^{\alpha'} \dot{\pi}^{\beta'} + a_{i'j'} \varphi^{i'} c_{\beta'}^{j'} \dot{\pi}^{\beta'} + \frac{1}{2} a_{i'j'} \varphi^{i'} \varphi^{j'}, \quad (1.180)$$

где су

$$G_{\alpha'\beta'}(\mathbf{q}, t) = a_{i'j'} c_{\alpha'}^{i'} c_{\beta'}^{j'}, \quad (1.181)$$

координате коваријантног метричког тензора у односу на кинематски независне координате q^0, q^1, \dots, q^m , односно независне квазиординате $\pi^0, \pi^1, \dots, \pi^m$. Лагранж–Даламберов принцип за реономне механичке системе има следећи облик [Vujičić, 1990]

$$(a_{i'j'} a^{j'} - Q_{i'}) \delta q^{i'} = 0, \quad (1.182)$$

где су $Q_{i'} = a_{i'j'} Q^{j'}$ коваријантне генерализане силе које одговарају геометријски независним координатама. На основу принципа Херца–Хелдера, пишемо

$$\delta q^{i'} = c_{\alpha'}^{i'} \delta \pi^{\alpha'}. \quad (1.183)$$

Полазећи од (1.182), имајући у виду (1.172), (1.183), као и то да су варијација $\delta \pi^{\alpha'}$ независне у проширеном конфигурационом простору V_{m+1} кинематски независних квазиордината, добија се $(m+1)$ -на диференцијална једначина кретања у коваријантном облику

$$\begin{aligned} G_{\alpha'\beta'} \ddot{\pi}^{\beta'} + a_{i'j'} c_{\alpha'}^{i'} c_{\gamma'}^{k'} \left(\frac{\partial c_{\beta'}^{j'}}{\partial q^{k'}} + \Gamma_{k'r'}^{j'} c_{\beta'}^{r'} \right) \dot{\pi}^{\beta'} \dot{\pi}^{\gamma'} \\ + a_{i'j'} c_{\alpha'}^{i'} \left(\frac{\partial c_{\gamma'}^{j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} + \frac{\partial c_{\gamma'}^{j'}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^{j'}}{\partial q^{k'}} c_{\gamma'}^{k'} + 2\Gamma_{k'r'}^{j'} c_{\gamma'}^{k'} \varphi^{r'} \right) \dot{\pi}^{\gamma'} \\ + a_{i'j'} c_{\alpha'}^{i'} \left(\frac{\partial \varphi^{j'}}{\partial q^{k'}} + \Gamma_{k'r'}^{j'} \varphi^{r'} \right) \varphi^{k'} + a_{i'j'} c_{\alpha'}^{i'} \frac{\partial \varphi^{j'}}{\partial t} = Q_{\alpha'}^*, \end{aligned} \quad (1.184)$$

односно

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} \ddot{\pi}^{\beta} + a_{i'j'} c_{\alpha}^{i'} c_{\gamma'}^{k'} \left(\frac{\partial c_{\beta'}^{j'}}{\partial q^{k'}} + \Gamma_{k'r'}^{j'} c_{\beta'}^{r'} \right) \dot{\pi}^{\beta'} \dot{\pi}^{\gamma'} \\ + a_{i'j'} c_{\alpha}^{i'} \left(\frac{\partial c_{\gamma'}^{j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} + \frac{\partial c_{\gamma'}^{j'}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^{j'}}{\partial q^{k'}} c_{\gamma'}^{k'} + 2\Gamma_{k'r'}^{j'} c_{\gamma'}^{k'} \varphi^{r'} \right) \dot{\pi}^{\gamma'} \\ + a_{i'j'} c_{\alpha}^{i'} \left(\frac{\partial \varphi^{j'}}{\partial q^{k'}} + \Gamma_{k'r'}^{j'} \varphi^{r'} \right) \varphi^{k'} + a_{i'j'} c_{\alpha}^{i'} \frac{\partial \varphi^{j'}}{\partial t} = Q_{\alpha}^*, \end{aligned} \quad (1.185)$$

$$\begin{aligned}
& G_{0\beta} \ddot{\pi}^\beta + a_{i'j'} c_0^{i'} c_{\gamma'}^{k'} \left(\frac{\partial c_{\beta'}^{j'}}{\partial q^{k'}} + \Gamma_{k'r'}^{j'} c_{\beta'}^{r'} \right) \dot{\pi}^{\beta'} \dot{\pi}^{\gamma'} \\
& + a_{i'j'} c_0^{i'} \left(\frac{\partial c_{\gamma'}^{j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} + \frac{\partial c_{\gamma'}^{j'}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^{j'}}{\partial q^{k'}} c_{\gamma'}^{k'} + 2\Gamma_{k'r'}^{j'} c_{\gamma'}^{k'} \varphi^{r'} \right) \dot{\pi}^{\gamma'} \quad (1.186) \\
& + a_{i'j'} c_0^{i'} \left(\frac{\partial \varphi^{j'}}{\partial q^{k'}} + \Gamma_{k'r'}^{j'} \varphi^{r'} \right) \varphi^{k'} + a_{i'j'} c_0^{i'} \frac{\partial \varphi^{j'}}{\partial t} = Q_0^*,
\end{aligned}$$

где су генерализане силе које одговарају кинематски независним координатама одређене као

$$Q_\alpha^*(\mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\pi}}, t) = c_\alpha^{i'} \bar{Q}_i, \quad (1.187)$$

где су $\bar{Q}_i = Q_i(\dot{q}^{j'} = c_{\beta'}^{j'} \dot{\pi}^{\beta'} + \varphi^{j'})$ и $\dot{\boldsymbol{\pi}} = (\dot{\pi}^0, \dot{\pi}^1, \dots, \dot{\pi}^m)^T$. Генерализана сила која одговара

реономној генерализаној координати q^0 има следећи облик

$$Q_0^* = c_0^{i'} \bar{Q}_i + R_0, \quad (1.188)$$

док су генерализане силе реакција холономних веза које респективно одговарају генерализаним координатама q^0, q^1, \dots, q^m одређене као

$$\begin{aligned}
R_0 &= \lambda_{\varkappa} \frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial q^0}, \\
R_i &= \lambda_{\varkappa} \frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial q^i} = 0,
\end{aligned} \quad (1.189)$$

где су λ_{\varkappa} Лагранжеви множитељи веза, имајући у виду да су у општем случају $\text{grad}_p f^{\varkappa} \cdot (\partial \bar{\mathbf{r}}_p / \partial q^0) \neq 0$. Једначине (1.185) могу се приказати у следећем облику

$$G_{\alpha\beta} \ddot{\pi}^\beta = \Delta_\alpha, \quad (1.190)$$

односно

$$\ddot{\pi}^\alpha = G^{\alpha\beta} \Delta_\beta, \quad (1.191)$$

где су

$$\begin{aligned}
\Delta_\alpha(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = & Q_\alpha^* - a_{i'j'} c_\alpha^{i'} c_\gamma^{k'} \left(\frac{\partial c_\beta^{j'}}{\partial q^{k'}} + \Gamma_{k'r'}^{j'} c_\beta^{r'} \right) \dot{\pi}^{\beta'} \dot{\pi}^{\gamma'} \\
& - a_{i'j'} c_\alpha^{i'} \left(\frac{\partial c_\gamma^{j'}}{\partial q^{k'}} \phi^{k'} + \frac{\partial c_\gamma^{j'}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{j'}}{\partial q^{k'}} c_\gamma^{k'} + 2\Gamma_{k'r'}^{j'} c_\gamma^{k'} \phi^{r'} \right) \dot{\pi}^{\gamma'} \quad (1.192) \\
& - a_{i'j'} c_\alpha^{i'} \left(\frac{\partial \phi^{j'}}{\partial q^{k'}} + \Gamma_{k'r'}^{j'} \phi^{r'} \right) \phi^{k'} - a_{i'j'} c_\alpha^{i'} \frac{\partial \phi^{j'}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Генералисане силе $Q_{i'}$, у општем случају, могу се приказати у следећем облику

$$Q_{i'}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^{i'}} + \tilde{Q}_{i'} + Q_{i'}^{\text{var}} + R_{i'}, \quad (1.193)$$

где су $\tilde{Q}_{i'} = \tilde{Q}_{i'}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ генералисане непотенцијалне силе, док су

$$Q_{i'}^{\text{var}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{p=1}^N \frac{dm_p}{dt} \vec{v}_p^{\text{rel}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial q^{i'}}, \quad (1.194)$$

генералисане реактивне силе. Генералисане силе услед наметнутих ограничења кретања (1.159), односно (1.163), имају следећи облик

$$Q_{i'}^\Lambda(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \Lambda_v \frac{\partial \Psi^v}{\partial q^{i'}}, \quad (1.195)$$

док су генералисане силе $Q_\alpha^{*\Lambda}$, које одговарају кинематски независним координатама, одређени следећим изразима

$$\begin{aligned}
Q_0^{*\Lambda} &= c_0^{i'} Q_{i'}^\Lambda = Q_0^\Lambda + b_0^v Q_v^\Lambda, \\
Q_\alpha^{*\Lambda} &= c_\alpha^{i'} Q_{i'}^\Lambda = \Lambda_v \left(c_\alpha^v - c_\alpha^\beta b_\beta^v \right).
\end{aligned} \quad (1.196)$$

Како су $c_\beta^v = b_\alpha^v c_\beta^\alpha$ и $Q_0^\Lambda = -\Lambda_v b_0^v$, генералисане силе $Q_\alpha^{*\Lambda}$ које одговарају кинематски независним координатама, односно независним квазикоординатама, једнаке су нули

$$Q_\alpha^{*\Lambda} = 0. \quad (1.197)$$

Овим је показано да непознати Лагранжеви множитељи веза Λ_v не фигуришу у диференцијалним једначинама кретања (1.185) и (1.186), односно у

конфигурационом простору V_{m+1} , чиме је поступак одређивања кретања, у односу на поступак одређивања реакција нехолономних веза, такође у потпуности раздвојен.

Одредимо сада диференцијалне једначине кретање нехолономног механичког система полазећи од Лагранж–Даламберовог принципа написаног у облику

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{k'}} - \frac{\partial T}{\partial q^{k'}} - Q_{k'} \right) \delta q^{k'} = 0. \quad (1.198)$$

Како су према (1.183) $\delta q^{k'} = c_{\alpha}^{k'} \delta \pi^{\alpha'}$, из једначине (1.198), имајући у виду да су варијације $\delta \pi^{\alpha'}$ независне, добија се $(m+1)$ –на једначина

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{k'}} - \frac{\partial T}{\partial q^{k'}} - Q_{k'} \right) c_{\alpha}^{k'} = 0. \quad (1.199)$$

Једначине (1.199), које описују кретање разматраног реономног нехолономног механичког система променљиве масе у проширеном конфигурационом простору V_{m+1} , представљају Мацијеве једначине. На основу (1.168), (1.176), (1.180), (1.187) и (1.199), добија се $(m+1)$ –на диференцијална једначина кретања

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}^{\alpha'}} - \frac{\partial T^*}{\partial q^{k'}} c_{\alpha}^{k'} + a_{i'j'} c_{\gamma}^{j'} \left(\frac{\partial c_{\beta}^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\alpha}^{k'} - \frac{\partial c_{\alpha}^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\beta}^{k'} \right) \dot{\pi}^{\beta'} \dot{\pi}^{\gamma'} \\ & + a_{i'j'} c_{\gamma}^{j'} \left(\frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\alpha}^{k'} - \frac{\partial c_{\alpha}^{i'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} - \frac{\partial c_{\alpha}^{i'}}{\partial t} \right) \dot{\pi}^{\gamma'} \\ & + a_{i'j'} \varphi^{j'} \left(\frac{\partial c_{\gamma}^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\alpha}^{k'} - \frac{\partial c_{\alpha}^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\gamma}^{k'} \right) \dot{\pi}^{\gamma'} \\ & + a_{i'j'} \varphi^{j'} \left(\frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\alpha}^{k'} - \frac{\partial c_{\alpha}^{i'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} - \frac{\partial c_{\alpha}^{i'}}{\partial t} \right) = Q_{\alpha}^*, \end{aligned} \quad (1.200)$$

односно

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}^\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial q^{k'}} c_\alpha^{k'} + a_{i'j'} c_{\gamma'}^{j'} \left(\frac{\partial c_{\beta'}^{i'}}{\partial q^{k'}} c_\alpha^{k'} - \frac{\partial c_\alpha^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\beta'}^{k'} \right) \dot{\pi}^{\beta'} \dot{\pi}^{\gamma'} \\
& + a_{i'j'} c_{\gamma'}^{j'} \left(\frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial q^{k'}} c_\alpha^{k'} - \frac{\partial c_\alpha^{i'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} - \frac{\partial c_\alpha^{i'}}{\partial t} \right) \dot{\pi}^{\gamma'} \\
& + a_{i'j'} \varphi^{j'} \left(\frac{\partial c_{\gamma'}^{i'}}{\partial q^{k'}} c_\alpha^{k'} - \frac{\partial c_\alpha^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\gamma'}^{k'} \right) \dot{\pi}^{\gamma'} \\
& + a_{i'j'} \varphi^{j'} \left(\frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial q^{k'}} c_\alpha^{k'} - \frac{\partial c_\alpha^{i'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} - \frac{\partial c_\alpha^{i'}}{\partial t} \right) = Q_\alpha^*,
\end{aligned} \tag{1.201}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}^0} - \frac{\partial T^*}{\partial q^{k'}} c_0^{k'} + a_{i'j'} c_{\gamma'}^{j'} \left(\frac{\partial c_{\beta'}^{i'}}{\partial q^{k'}} c_0^{k'} - \frac{\partial c_0^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\beta'}^{k'} \right) \dot{\pi}^{\beta'} \dot{\pi}^{\gamma'} \\
& + a_{i'j'} c_{\gamma'}^{j'} \left(\frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial q^{k'}} c_0^{k'} - \frac{\partial c_0^{i'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} - \frac{\partial c_0^{i'}}{\partial t} \right) \dot{\pi}^{\gamma'} \\
& + a_{i'j'} \varphi^{j'} \left(\frac{\partial c_{\gamma'}^{i'}}{\partial q^{k'}} c_0^{k'} - \frac{\partial c_0^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\gamma'}^{k'} \right) \dot{\pi}^{\gamma'} \\
& + a_{i'j'} \varphi^{j'} \left(\frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial q^{k'}} c_0^{k'} - \frac{\partial c_0^{i'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} - \frac{\partial c_0^{i'}}{\partial t} \right) = Q_0^*.
\end{aligned} \tag{1.202}$$

Како бисмо доказали еквивалентност форми (1.184) и (1.200), неопходно је најпре приказати прва два члана форме (1.200) у развијеном облику, у складу са (1.169) и (1.180)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}^{\alpha'}} &= G_{\alpha'\beta'} \ddot{\pi}^{\beta'} + c_{\gamma'}^{k'} \left(\frac{\partial a_{i'j'}}{\partial q^{k'}} c_\alpha^{i'} c_{\beta'}^{j'} + a_{i'j'} \frac{\partial c_\alpha^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\beta'}^{j'} + a_{i'j'} \frac{\partial c_{\beta'}^{j'}}{\partial q^{k'}} c_\alpha^{i'} \right) \dot{\pi}^{\beta'} \dot{\pi}^{\gamma'} \\
& + \left(\frac{\partial a_{i'j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} c_\alpha^{i'} c_{\beta'}^{j'} + a_{i'j'} \frac{\partial c_\alpha^{i'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} c_{\beta'}^{j'} + a_{i'j'} \frac{\partial c_\alpha^{i'}}{\partial t} c_{\beta'}^{j'} + a_{i'j'} \frac{\partial c_{\beta'}^{j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} c_\alpha^{i'} \right. \\
& + a_{i'j'} \frac{\partial c_{\beta'}^{j'}}{\partial t} c_\alpha^{i'} + \frac{\partial a_{i'j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{i'} c_\alpha^{j'} c_{\beta'}^{k'} + a_{i'j'} \frac{\partial c_\alpha^{j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{i'} c_{\beta'}^{k'} + a_{i'j'} \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\beta'}^{k'} c_\alpha^{j'} \left. \right) \dot{\pi}^{\beta'} \\
& + \left(\frac{\partial a_{i'j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} c_\alpha^{j'} + a_{i'j'} \frac{\partial c_\alpha^{j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} + a_{i'j'} \frac{\partial c_\alpha^{j'}}{\partial t} \right) \varphi^{i'} + a_{i'j'} c_\alpha^{j'} \left(\frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} + \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial t} \right),
\end{aligned} \tag{1.203}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T^*}{\partial q^{k'}} c_{\alpha'}^{k'} = & \left(\frac{1}{2} \frac{\partial a_{i'j'}}{\partial q^{k'}} c_{\gamma'}^{i'} c_{\beta'}^{j'} \dot{\pi}^{\beta'} \dot{\pi}^{\gamma'} + a_{i'j'} \frac{\partial c_{\beta'}^{j'}}{\partial q^{k'}} c_{\gamma'}^{i'} \dot{\pi}^{\beta'} \dot{\pi}^{\gamma'} + \frac{\partial a_{i'j'}}{\partial q^{k'}} c_{\beta'}^{j'} \varphi^{i'} \dot{\pi}^{\beta'} \right. \\
& \left. + a_{i'j'} \frac{\partial c_{\beta'}^{j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{i'} \dot{\pi}^{\beta'} + a_{i'j'} \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\beta'}^{j'} \dot{\pi}^{\beta'} + \frac{1}{2} \frac{\partial a_{i'j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{i'} \varphi^{j'} + a_{i'j'} \frac{\partial \varphi^{j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{i'} \right) c_{\alpha'}^{k'}.
\end{aligned} \tag{1.204}$$

Сада, имајући у виду (1.200), (1.203) и (1.204), можемо писати

$$\begin{aligned}
G_{\alpha'\beta'} \dot{\pi}^{\beta'} + c_{\gamma'}^{k'} & \left(\frac{\partial a_{i'j'}}{\partial q^{k'}} c_{\alpha'}^{i'} c_{\beta'}^{j'} + a_{i'j'} \frac{\partial c_{\alpha'}^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\beta'}^{j'} + a_{i'j'} \frac{\partial c_{\beta'}^{j'}}{\partial q^{k'}} c_{\alpha'}^{i'} \right) \dot{\pi}^{\beta'} \dot{\pi}^{\gamma'} \\
& + \left(\frac{\partial a_{i'j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} c_{\alpha'}^{i'} c_{\beta'}^{j'} + a_{i'j'} \frac{\partial c_{\alpha'}^{i'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} c_{\beta'}^{j'} + a_{i'j'} \frac{\partial c_{\alpha'}^{i'}}{\partial t} c_{\beta'}^{j'} + a_{i'j'} \frac{\partial c_{\beta'}^{j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} c_{\alpha'}^{i'} \right. \\
& \left. + a_{i'j'} \frac{\partial c_{\beta'}^{j'}}{\partial t} c_{\alpha'}^{i'} + \frac{\partial a_{i'j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{i'} c_{\alpha'}^{j'} c_{\beta'}^{k'} + a_{i'j'} \frac{\partial c_{\alpha'}^{j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{i'} c_{\beta'}^{k'} + a_{i'j'} \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\beta'}^{k'} c_{\alpha'}^{j'} \right) \dot{\pi}^{\beta'} \\
& + \left(\frac{\partial a_{i'j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} c_{\alpha'}^{j'} + a_{i'j'} \frac{\partial c_{\alpha'}^{j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} + a_{i'j'} \frac{\partial c_{\alpha'}^{j'}}{\partial t} \right) \varphi^{i'} + a_{i'j'} c_{\alpha'}^{j'} \left(\frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} + \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial t} \right) \\
& - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial a_{i'j'}}{\partial q^{k'}} c_{\gamma'}^{i'} c_{\beta'}^{j'} \dot{\pi}^{\beta'} \dot{\pi}^{\gamma'} + a_{i'j'} \frac{\partial c_{\beta'}^{j'}}{\partial q^{k'}} c_{\gamma'}^{i'} \dot{\pi}^{\beta'} \dot{\pi}^{\gamma'} + \frac{\partial a_{i'j'}}{\partial q^{k'}} c_{\beta'}^{j'} \varphi^{i'} \dot{\pi}^{\beta'} \right. \\
& \left. + a_{i'j'} \frac{\partial c_{\beta'}^{j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{i'} \dot{\pi}^{\beta'} + a_{i'j'} \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\beta'}^{j'} \dot{\pi}^{\beta'} + \frac{1}{2} \frac{\partial a_{i'j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{i'} \varphi^{j'} + a_{i'j'} \frac{\partial \varphi^{j'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{i'} \right) c_{\alpha'}^{k'} \\
& + a_{i'j'} c_{\gamma'}^{j'} \left(\frac{\partial c_{\beta'}^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\alpha'}^{k'} - \frac{\partial c_{\alpha'}^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\beta'}^{k'} \right) \dot{\pi}^{\beta'} \dot{\pi}^{\gamma'} \\
& + a_{i'j'} c_{\gamma'}^{j'} \left(\frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\alpha'}^{k'} - \frac{\partial c_{\alpha'}^{i'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} - \frac{\partial c_{\alpha'}^{i'}}{\partial t} \right) \dot{\pi}^{\gamma'} \\
& + a_{i'j'} \varphi^{j'} \left(\frac{\partial c_{\gamma'}^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\alpha'}^{k'} - \frac{\partial c_{\alpha'}^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\gamma'}^{k'} \right) \dot{\pi}^{\gamma'} \\
& + a_{i'j'} \varphi^{j'} \left(\frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial q^{k'}} c_{\alpha'}^{k'} - \frac{\partial c_{\alpha'}^{i'}}{\partial q^{k'}} \varphi^{k'} - \frac{\partial c_{\alpha'}^{i'}}{\partial t} \right) = Q_{\alpha'}^*.
\end{aligned} \tag{1.205}$$

Форма (1.205), после трансформације појединих чланова и краћег сређивања, добија облик (1.184), чиме је доказана потпуна еквивалентност форми (1.184) и (1.205).

У наставку биће дати познати облици диференцијалних једначина, које описују кретање разматраног реономног нехолономног механичког система променљиве масе, добијене применом већ приказаног поступка који је изложен у првом делу овог поглавља.

1.2.2 Волтерине једначине

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}^{\alpha'}} - A_{i',j'} c_{\beta'}^{j'} c_{\gamma'}^{k'} \frac{\partial c_{\alpha'}^{i'}}{\partial \xi^{k'}} \dot{\pi}^{\beta'} \dot{\pi}^{\gamma'} - A_{i',j'} c_{\beta'}^{j'} \left(\frac{\partial c_{\alpha'}^{i'}}{\partial t} + 2 \frac{\partial c_{\alpha'}^{i'}}{\partial \xi^{k'}} \varphi^{k'} \right) \dot{\pi}^{\beta'} \\ - A_{i',j'} \left(\frac{\partial c_{\alpha'}^{i'}}{\partial t} + \frac{\partial c_{\alpha'}^{i'}}{\partial \xi^{k'}} \varphi^{k'} \right) \varphi^{j'} = \Xi_{\alpha'}^* . \end{aligned} \quad (1.206)$$

1.2.3 Вороњчеве једначине

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{\alpha'}} - \frac{\partial T^*}{\partial q^{\alpha'}} - \frac{\partial T^*}{\partial q^{\nu}} b_{\alpha'}^{\nu} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\nu}} \left(\sigma_{\alpha'\beta'}^{\nu} \dot{q}^{\beta'} + \sigma_{\alpha'}^{\nu} \right) = \tilde{Q}_{\alpha'} , \\ \sigma_{\alpha'\beta'}^{\nu} = \frac{\partial b_{\alpha'}^{\nu}}{\partial q^{\beta'}} + \frac{\partial b_{\alpha'}^{\nu}}{\partial q^{\rho}} b_{\beta'}^{\rho} - \frac{\partial b_{\beta'}^{\nu}}{\partial q^{\alpha'}} - \frac{\partial b_{\beta'}^{\nu}}{\partial q^{\rho}} b_{\alpha'}^{\rho} , \\ \sigma_{\alpha'}^{\nu} = \frac{\partial b_{\alpha'}^{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial b_{\alpha'}^{\nu}}{\partial q^{\rho}} b^{\rho} - \frac{\partial b^{\nu}}{\partial q^{\alpha'}} - \frac{\partial b^{\nu}}{\partial q^{\rho}} b_{\alpha'}^{\rho} , \\ \tilde{Q}_{\alpha'} = Q_{\alpha'} + Q_{\nu} b_{\alpha'}^{\nu} . \end{aligned} \quad (1.207)$$

1.2.4 Чаплигинове једначине

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{\alpha'}} - \frac{\partial T^*}{\partial q^{\alpha'}} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\nu}} \left(\sigma_{\alpha'\beta'}^{\nu} \dot{q}^{\beta'} + \sigma_{\alpha'}^{\nu} \right) = \tilde{Q}_{\alpha'} , \\ \sigma_{\alpha'\beta'}^{\nu} = \frac{\partial b_{\alpha'}^{\nu}}{\partial q^{\beta'}} - \frac{\partial b_{\beta'}^{\nu}}{\partial q^{\alpha'}} , \\ \sigma_{\alpha'}^{\nu} = \frac{\partial b_{\alpha'}^{\nu}}{\partial t} - \frac{\partial b^{\nu}}{\partial q^{\alpha'}} , \\ \tilde{Q}_{\alpha'} = Q_{\alpha'} + Q_{\nu} b_{\alpha'}^{\nu} . \end{aligned} \quad (1.208)$$

1.2.5 Генералисане Волтерине једначине

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\theta}^{\alpha'}} - \frac{\partial T^*}{\partial x^{i'}} c_{\alpha'}^{i'} - \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\theta}^{\alpha'}} \left(\frac{\partial c_{\alpha'}^{\beta'}}{\partial x^{j'}} c_{\gamma'}^{j'} \dot{\theta}^{\gamma'} + \frac{\partial c_{\alpha'}^{\beta'}}{\partial x^{j'}} \omega^{j'} + \frac{\partial c_{\alpha'}^{\beta'}}{\partial t} - \frac{\partial c_{\gamma'}^{\beta'}}{\partial x^{i'}} c_{\alpha'}^{i'} \dot{\theta}^{\gamma'} \right. \\
\left. - \frac{\partial \omega^{\beta'}}{\partial x^{i'}} c_{\alpha'}^{i'} \right) d_{\beta'}^{\alpha'} - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^{\nu}} \left(\frac{\partial c_{\alpha'}^{\nu}}{\partial x^{j'}} c_{\gamma'}^{j'} \dot{\theta}^{\gamma'} + \frac{\partial c_{\alpha'}^{\nu}}{\partial x^{j'}} \omega^{j'} - \frac{\partial c_{\gamma'}^{\nu}}{\partial x^{i'}} c_{\alpha'}^{i'} \dot{\theta}^{\gamma'} \right. \\
\left. - \frac{\partial \omega^{\nu}}{\partial x^{i'}} c_{\alpha'}^{i'} + \frac{\partial c_{\alpha'}^{\nu}}{\partial t} \right) + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^{\nu}} c_{\alpha'}^{\nu} d_{\beta'}^{\alpha'} \left(\frac{\partial c_{\alpha'}^{\beta'}}{\partial x^{j'}} c_{\gamma'}^{j'} \dot{\theta}^{\gamma'} + \frac{\partial c_{\alpha'}^{\beta'}}{\partial x^{j'}} \omega^{j'} + \frac{\partial c_{\alpha'}^{\beta'}}{\partial t} \right. \\
\left. - \frac{\partial c_{\gamma'}^{\beta'}}{\partial x^{i'}} c_{\alpha'}^{i'} \dot{\theta}^{\gamma'} - \frac{\partial \omega^{\beta'}}{\partial x^{i'}} c_{\alpha'}^{i'} \right) = Q_{\alpha'}^*, \tag{1.209}
\end{aligned}$$

где је

$$T^* = T_{(\dot{x}^i = c_{\alpha'}^i \dot{\theta}^{\alpha'} + \omega^i)} = \frac{1}{2} a_{i,j} c_{\alpha'}^i c_{\beta'}^j \dot{\theta}^{\alpha'} \dot{\theta}^{\beta'} + a_{i,j} \omega^i c_{\beta'}^j \dot{\theta}^{\beta'} + \frac{1}{2} a_{i,j} \omega^i \omega^j. \tag{1.210}$$

1.2.6 Ферерсове једначине

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}^{\alpha'}} - A_{i,j} \dot{\xi}^j \frac{\partial c_{\alpha'}^{i'}}{\partial \xi^{k'}} \dot{\xi}^k = \Xi_{\alpha'}^*. \tag{1.211}$$

1.2.7 Болцман–Хамелове једначине

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}^{\alpha'}} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^{i'}} c_{\alpha'}^{i'} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}^{s'}} d_{k'}^{s'} \left(\frac{\partial c_{\alpha'}^{k'}}{\partial q^{r'}} c_{\beta'}^{r'} - \frac{\partial c_{\beta'}^{k'}}{\partial q^{i'}} c_{\alpha'}^{i'} \right) \dot{\pi}^{\beta'} \\
- \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}^{s'}} d_{k'}^{s'} \left(\frac{\partial c_{\alpha'}^{k'}}{\partial q^{r'}} \varphi^{r'} + \frac{\partial c_{\alpha'}^{k'}}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^{k'}}{\partial q^{i'}} c_{\alpha'}^{i'} \right) = Q_{\alpha'}^*, \tag{1.212}
\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}^{\alpha'}} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^{i'}} c_{\alpha'}^{i'} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}^{s'}} c_{\alpha'}^{i'} c_{\beta'}^{r'} \left(\frac{\partial d_{r'}^{s'}}{\partial q^{i'}} - \frac{\partial d_{i'}^{s'}}{\partial q^{r'}} \right) \dot{\pi}^{\beta'} \\
+ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}^{s'}} c_{\alpha'}^{i'} \left(\frac{\partial d_{i'}^{s'}}{\partial q^{r'}} \varphi^{r'} + \frac{\partial d_{i'}^{s'}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^{k'}}{\partial q^{i'}} d_{k'}^{s'} \right) = Q_{\alpha'}^*, \tag{1.213}
\end{aligned}$$

при чему се у свим изразима после првог диференцирања ставља да су $\dot{\pi}^V = 0$. Израз за кинетичку енергију у функцији свих квазибрзина има следећи облик

$$\tilde{T} = T_{(\dot{q}^{i'} = c_{r'}^{i'} \dot{\pi}^{r'} + \varphi^{i'})} = \frac{1}{2} a_{i'j'} c_{k'}^{i'} c_{r'}^{j'} \dot{\pi}^{k'} \dot{\pi}^{r'} + a_{i'j'} \varphi^{i'} c_{r'}^{j'} \dot{\pi}^{r'} + \frac{1}{2} a_{i'j'} \varphi^{i'} \varphi^{j'}. \quad (1.214)$$

1.2.8 Апелове једначине

У циљу формирања Апелових једначина кретања, дефинишимо Апелову функцију убрзања [Vujićić, 1990]

$$S = \frac{1}{2} a_{i'j'} a^{i'} a^{j'}, \quad (1.215)$$

имајући у виду да су

$$\begin{aligned} a^{i'} = & c_{\alpha'}^{i'} \ddot{\pi}^{\alpha'} + c_{\beta'}^{r'} \left(\frac{\partial c_{\alpha'}^{i'}}{\partial q^{r'}} + \Gamma_{k'r}^{i'} c_{\alpha'}^{k'} \right) \dot{\pi}^{\alpha'} \dot{\pi}^{\beta'} \\ & + \left(\frac{\partial c_{\beta'}^{i'}}{\partial q^{r'}} \varphi^{r'} + \frac{\partial c_{\beta'}^{i'}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial q^{r'}} c_{\beta'}^{r'} + 2\Gamma_{k'r}^{i'} c_{\beta'}^{r'} \varphi^{k'} \right) \dot{\pi}^{\beta'} + \left(\frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial q^{r'}} + \Gamma_{k'r}^{i'} \varphi^{k'} \right) \varphi^{r'} + \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.216)$$

Апелове једначине гласе

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\pi}^{\alpha'}} = Q_{\alpha'}^*, \quad (1.217)$$

док су Апелове једначине у односу на стварне генералисане координате q^0, q^1, \dots, q^n

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \dot{q}^{\alpha}} = \tilde{Q}_{\alpha}, \quad (1.218)$$

где је

$$\tilde{S} = \frac{1}{2} a_{i'j'} a^{i'} a^{j'}, \quad (1.219)$$

Апелова функција у односу на стварна убрзања

$$a^{i'} = \ddot{q}^{i'} + \Gamma_{k'r}^{i'} \dot{q}^{k'} \dot{q}^{r'}. \quad (1.220)$$

1.2.9 Лагранжеве једначине друге врсте са неодређеним множитељима

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0} - \frac{\partial T}{\partial q^0} &= Q_0 - \Lambda_v b_0^v + R_0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} &= Q_\alpha - \Lambda_v b_\alpha^v, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^v} - \frac{\partial T}{\partial q^v} &= Q_v + \Lambda_v.\end{aligned}\tag{1.221}$$

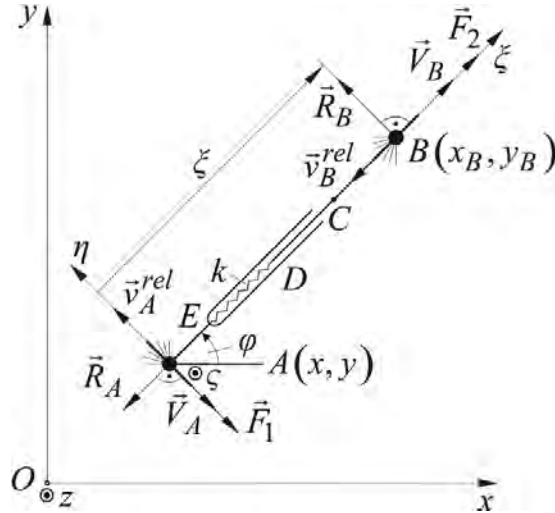
1.3 Примери

Претходна разматрања биће илустрована на различитим нехолономним механичким системима.

1.3.1 Нехолономни механички систем променљиве масе са управним брзинама

Нехолономни механички систем чине две материјалне тачке A и B променљиве масе, којима је наметнуто ограничење кретања у виду управности брзина, посредством Чаплигинових сечива занемарљивих маса као што је то приказано на слици 1.1. За потребе даљих разматрања, неопходно је најпре увести два Декартова координатна система референције. Непокретни координатни систем $Oxyz$, чија координатна равна Oxy се поклапа са хоризонталном равни кретања система, док је покретни координатни систем $A\xi\epsilon\delta$, чији координатни почетак се поклапа са тачком A система, тако да се координатна равна $A\xi\epsilon$ поклапа са равни Oxy . Оса покретног координатног система $A\xi$ је одређена правцем AB , односно $B \in A\xi$, док су јединични вектори оса ξ, ϵ и δ покретног координатног система $\vec{\lambda}, \vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$ респективно. Материјалне тачке A и B променљиве масе, као и опруга крутости k и слободне дужине l_0 , међусобно су спојене лаким механизмом типа „вила”, који

дозвољава да се растојање $\overline{AB} = \zeta \neq \text{const.}$ мења. У тачкама A и B дејствују непотенцијалне силе $\vec{F}_1 = -F_1\vec{\mu}$ и $\vec{F}_2 = F_2\vec{\lambda}$ респективно.



Слика 1.1 Нехолономни механички систем променљиве масе са управним брзинама
 Конфигурација разматраног система дефинисана је скупом Лагранжевих координата $\mathbf{q} = (q^1, q^2, q^3, q^4)^T$, где је $q^1 \triangleq \varphi$ угао између осе Ox и осе $A\xi$, $q^2 \triangleq \zeta$ је релативна координата тачке B у односу на покретни координатни систем, док су $q^3 \triangleq x$ и $q^4 \triangleq y$ Декартове координате тачке A . Закони промене маса материјаних тачака A и B у функцији времена познати су

$$\begin{aligned} m_A &= m_A(t), \\ m_B &= m_B(t). \end{aligned} \quad (1.222)$$

Интензитети релативних брзина одвајања честица, не умањујући општост даљег излагања, константни су и међусобно једнаки

$$v_A^{rel} = v_B^{rel} = v, \quad (1.223)$$

где је v одређена позитивна константа, где су $\vec{v}_A^{rel} = v\vec{\mu}$ и $\vec{v}_B^{rel} = -v\vec{\lambda}$. Сходно ограничењу кретања тачака A и B система, нехолономне хомогене везе имају следећи облик

$$\begin{aligned}\psi^3 &\equiv \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi = 0, \\ \psi^4 &\equiv -\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi + \xi \dot{\varphi} = 0.\end{aligned}\tag{1.224}$$

Услед наметнутих ограничења кретања (1.224), јављају се хоризонталне реакције $\vec{R}_A = -R_A \cos \varphi \vec{i} - R_A \sin \varphi \vec{j}$ и $\vec{R}_B = -R_B \sin \varphi \vec{i} + R_B \cos \varphi \vec{j}$ нехолономних веза у тачкама A и B респективно. За независне квазибрзине изаберимо брзине тачака A и B респективно

$$\begin{aligned}\dot{\pi}^1 &= V_A = \dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi, \\ \dot{\pi}^2 &= V_B = \dot{\xi}.\end{aligned}\tag{1.225}$$

На основу (1.15), (1.224) и (1.225), све генералисане брзине могу се изразити у функцији независних квазибрзина

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{1}{\xi} V_A, \\ \dot{\xi} &= V_B, \\ \dot{x} &= \sin \varphi V_A, \\ \dot{y} &= -\cos \varphi V_A.\end{aligned}\tag{1.226}$$

Кинетичка и потенцијална енергија система имају следећи облик респективно

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} m_B V_B^2 = \frac{1}{2} m_A (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m_B \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{\xi} (\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi) \right. \\ &\quad \left. - 2\dot{\xi} \dot{\varphi} (\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi) + \dot{\xi}^2 + (\dot{\xi} \dot{\varphi})^2 \right],\end{aligned}\tag{1.227}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k \left[(\xi - l_0 - L)^2 - (\xi(t_0) - l_0 - L)^2 \right],$$

где је $L = \overline{AE} + \overline{BD}$. Израз за кинетичку енергију система, која је функција независних квазибрзина $\dot{\pi}^1 = V_A$ и $\dot{\pi}^2 = V_B$, гласи

$$T^* = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \dot{\pi}^\alpha \dot{\pi}^\beta = \frac{1}{2} (m_A V_A^2 + m_B V_B^2).\tag{1.228}$$

Сада се, на основу (1.36), (1.223), (1.224), (1.225), (1.227) и (1.228), могу формирати диференцијалне једначине кретања система у коваријантном облику

$$\begin{aligned}m_A \dot{V}_A &= -\dot{m}_A v + F_1, \\ m_B \dot{V}_B &= -k(\xi - l_0 - L) - \dot{m}_B v + F_2.\end{aligned}\tag{1.229}$$

За случај да су материјалне тачке A и B константне масе, једначине (1.229) добијају облик

$$\begin{aligned} m_A \dot{V}_A &= F_1, \\ m_B \dot{V}_B &= -k(\zeta - l_0 - L) + F_2. \end{aligned} \quad (1.230)$$

Волтерине једначине добијају се када се за геометријски независне координате изаберу независне Декартове координате тачака система

$$\zeta^1 = x_A, \quad \zeta^2 = y_A, \quad \zeta^3 = x_B, \quad \zeta^4 = y_B, \quad (1.231)$$

док су компоненте брзина $\dot{\zeta}^i$ тачака A и B система одређене као

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}^1 &= \frac{\zeta^4 - \zeta^2}{\sqrt{(\zeta^3 - \zeta^1)^2 + (\zeta^4 - \zeta^2)^2}} V_A, & \dot{\zeta}^2 &= -\frac{\zeta^3 - \zeta^1}{\sqrt{(\zeta^3 - \zeta^1)^2 + (\zeta^4 - \zeta^2)^2}} V_A, \\ \dot{\zeta}^3 &= -\frac{\zeta^3 - \zeta^1}{\sqrt{(\zeta^3 - \zeta^1)^2 + (\zeta^4 - \zeta^2)^2}} V_B, & \dot{\zeta}^4 &= \frac{\zeta^4 - \zeta^2}{\sqrt{(\zeta^3 - \zeta^1)^2 + (\zeta^4 - \zeta^2)^2}} V_B. \end{aligned} \quad (1.232)$$

Изрази за T и T^* гласе

$$T = \frac{1}{2} m_A \left[(\dot{\zeta}^1)^2 + (\dot{\zeta}^2)^2 \right] + \frac{1}{2} m_B \left[(\dot{\zeta}^3)^2 + (\dot{\zeta}^4)^2 \right], \quad T^* = \frac{1}{2} (m_A V_A^2 + m_B V_B^2), \quad (1.233)$$

док израз за потенцијалну енергију система има следећи облик

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} k \left[\left(\sqrt{(\zeta^3 - \zeta^1)^2 + (\zeta^4 - \zeta^2)^2} - l_0 - L \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\sqrt{(\zeta_0^3 - \zeta_0^1)^2 + (\zeta_0^4 - \zeta_0^2)^2} - l_0 - L \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.234)$$

Волтерине једначине

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}^\alpha} - \delta_{ij} \sqrt{m_i m_j} c_\beta^j c_\gamma^k \frac{\partial c_\alpha^i}{\partial \zeta^k} \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma = \Xi_\alpha^*, \quad (1.235)$$

за разматрани механички систем гласе

$$\begin{aligned}
m_A \dot{V}_A &= -\dot{m}_A v + F_1, \\
m_B \dot{V}_B &= -k \left(\sqrt{(\xi^3 - \xi^1)^2 + (\xi^4 - \xi^2)^2} - l_0 - L \right) - \dot{m}_B v + F_2,
\end{aligned} \tag{1.236}$$

где генерализане силе имају следећи облик

$$\begin{aligned}
\Xi_1^* &= -\dot{m}_A v + F_1, \\
\Xi_2^* &= -k \left(\sqrt{(\xi^3 - \xi^1)^2 + (\xi^4 - \xi^2)^2} - l_0 - L \right) - \dot{m}_B v + F_2.
\end{aligned} \tag{1.237}$$

Формиране Волтерине једначине (1.236) представљају уједно и Ферерсове једначине.

Вороњчеве једначине

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial q^\nu} b_\alpha^\nu - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\nu} \left(\frac{\partial b_\alpha^\nu}{\partial q^\beta} + \frac{\partial b_\alpha^\nu}{\partial q^\rho} b_\beta^\rho - \frac{\partial b_\beta^\nu}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial b_\beta^\nu}{\partial q^\rho} b_\alpha^\rho \right) \dot{q}^\beta = Q_\alpha + Q_\nu b_\alpha^\nu, \tag{1.238}$$

за разматрани механички систем, у потпуности су еквивалентне Чаплигиновим једначинама

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\nu} \left(\frac{\partial b_\alpha^\nu}{\partial q^\beta} - \frac{\partial b_\beta^\nu}{\partial q^\alpha} \right) \dot{q}^\beta = Q_\alpha + Q_\nu b_\alpha^\nu, \tag{1.239}$$

с обзиром да $T, T^*, \Pi, b_\alpha^\nu$ и Q_i не зависе од Декартових координата тачке A , тј. од

координата које одговарају зависним брзинама. Изрази за T и T^* гласе

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_A (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m_B \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{\zeta} (\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi) \right. \\
&\quad \left. - 2\dot{\zeta} \dot{\varphi} (\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi) + \dot{\zeta}^2 + (\dot{\zeta} \dot{\varphi})^2 \right],
\end{aligned} \tag{1.240}$$

$$T^* = \frac{1}{2} m_A (\dot{\zeta} \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} m_B \dot{\zeta}^2.$$

После одређених срачунавања из (1.239), добијају се диференцијалне једначине кретања разматраног механичког система

$$\begin{aligned}
m_A \dot{\zeta} \ddot{\varphi} + m_A \dot{\varphi} \dot{\zeta} &= -\dot{m}_A v + F_1, \\
m_B \ddot{\zeta} &= -k (\dot{\zeta} - l_0 - L) - \dot{m}_B v + F_2.
\end{aligned} \tag{1.241}$$

У циљу формирања Хамел–Болцманових једначина, успоставимо релације између квазибрзина и генералисаних брзина

$$\begin{aligned}\dot{\pi}^1 &= V_A = \xi \dot{\phi}, \\ \dot{\pi}^2 &= V_B = \dot{\xi}, \\ \dot{\pi}^3 &= \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi = 0, \\ \dot{\pi}^4 &= -\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi + \xi \dot{\phi} = 0,\end{aligned}\tag{1.242}$$

односно

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{1}{\xi} V_A, \\ \dot{\xi} &= V_B, \\ \dot{x} &= \dot{\pi}^3 \cos \varphi - (\dot{\pi}^4 - V_A) \sin \varphi, \\ \dot{y} &= \dot{\pi}^3 \sin \varphi + (\dot{\pi}^4 - V_A) \cos \varphi.\end{aligned}\tag{1.243}$$

Изрази за T , \tilde{T} и Π гласе

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m_A (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m_B \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{\xi} (\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi) \right. \\ &\quad \left. - 2\xi \dot{\phi} (\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi) + \dot{\xi}^2 + (\xi \dot{\phi})^2 \right], \quad \tilde{T} = \frac{1}{2} m_A \left[(\dot{\pi}^3)^2 + (\dot{\pi}^4 - V_A)^2 \right] + \frac{1}{2} m_B V_B^2,\end{aligned}\tag{1.244}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k \left[(\xi - l_0 - L)^2 - (\xi(t_0) - l_0 - L)^2 \right].$$

Имајући у виду да су $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^i} = 0$, Хамел–Болцманове једначине кретања система гласе

$$\begin{aligned}m_A \dot{V}_A &= -\dot{m}_A v + F_1, \\ m_B \dot{V}_B &= -k(\xi - l_0 - L) - \dot{m}_B v + F_2.\end{aligned}\tag{1.245}$$

Функција убрзања S разматраног система одређена је следећом релацијом

$$S = \frac{1}{2} m_A a_1^2 + \frac{1}{2} m_B a_2^2 = \frac{1}{2} m_A \left[(\ddot{\xi}^1)^2 + (\ddot{\xi}^2)^2 \right] + \frac{1}{2} m_B \left[(\ddot{\xi}^3)^2 + (\ddot{\xi}^4)^2 \right].\tag{1.246}$$

Како су компоненте брзина тачака A и B система одређене као

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}^1 &= \sin \varphi V_A, \\
\dot{\xi}^2 &= -\cos \varphi V_A, \\
\dot{\xi}^3 &= \cos \varphi V_B, \\
\dot{\xi}^4 &= \sin \varphi V_B,
\end{aligned}
\tag{1.247}$$

компоненте убрзања имају следећи облик

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi}^1 &= \sin \varphi \dot{V}_A + \frac{1}{\xi} \cos \varphi V_A^2, & \ddot{\xi}^2 &= -\cos \varphi \dot{V}_A + \frac{1}{\xi} \sin \varphi V_A^2, \\
\ddot{\xi}^3 &= \cos \varphi \dot{V}_B - \frac{1}{\xi} \sin \varphi V_A V_B, & \ddot{\xi}^4 &= \sin \varphi \dot{V}_B + \frac{1}{\xi} \cos \varphi V_A V_B.
\end{aligned}
\tag{1.248}$$

Функција убрзања (1.246), имајући у виду (1.248), добија сада следећи облик

$$S = \frac{1}{2} m_A \left(\dot{V}_A^2 + \frac{V_A^4}{\xi^2} \right) + \frac{1}{2} m_B \left(\dot{V}_B^2 + \frac{V_A^2 V_B^2}{\xi^2} \right).
\tag{1.249}$$

Како су на основу (1.185)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \dot{V}_A} &= m_A \dot{V}_A, \\
\frac{\partial S}{\partial \dot{V}_B} &= m_B \dot{V}_B,
\end{aligned}
\tag{1.250}$$

Апелове једначине кретања разматраног система гласе

$$\begin{aligned}
m_A \dot{V}_A &= -\dot{m}_A v + F_1, \\
m_B \dot{V}_B &= -k(\xi - l_0 - L) - \dot{m}_B v + F_2.
\end{aligned}
\tag{1.251}$$

У циљу формирања диференцијалних једначина кретања у форми Лагранжевих једначина друге врсте са неодређеним множителјима, одредимо кинетичку енергију система

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_A (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m_B \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{\xi} (\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi) \right. \\
&\quad \left. - 2\dot{\xi} \dot{\varphi} (\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi) + \dot{\xi}^2 + (\dot{\xi} \dot{\varphi})^2 \right].
\end{aligned}
\tag{1.252}$$

Лагранжеве једначине друге врсте са неодређеним множителјима, које одговарају генерализаним координатама q^1, q^2, q^3 и q^4 респективно, имају следећи облик

$$\begin{aligned}
m_B \left[\xi^2 \ddot{\varphi} + 2\xi \dot{\xi} \dot{\varphi} - \xi \left(\ddot{q}^3 \sin \varphi - \ddot{q}^4 \cos \varphi \right) \right] &= \Lambda_4 q^2, \\
m_B \left[\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi + \ddot{\xi} - \xi \dot{\varphi}^2 \right] &= -\dot{m}_B v + F_2 - k(\xi - l_0 - L), \\
m_A \ddot{x} + m_B \left[\ddot{x} + \ddot{\xi} \cos \varphi - 2\dot{\xi} \dot{\varphi} \sin \varphi - \xi \ddot{\varphi} \sin \varphi - \xi \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \right] &= \\
\Lambda_3 \cos \varphi - \Lambda_4 \sin \varphi - \dot{m}_A v \sin \varphi - \dot{m}_B v \cos \varphi + F_1 \sin \varphi + F_2 \cos \varphi, \\
m_A \ddot{y} + m_B \left[\ddot{y} + \ddot{\xi} \sin \varphi + 2\dot{\xi} \dot{\varphi} \cos \varphi + \xi \ddot{\varphi} \cos \varphi - \xi \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right] &= \\
\Lambda_3 \sin \varphi + \Lambda_4 \cos \varphi + \dot{m}_A v \cos \varphi - \dot{m}_B v \sin \varphi - F_1 \cos \varphi + F_2 \sin \varphi.
\end{aligned} \tag{1.253}$$

Ако се има у виду да су

$$\begin{aligned}
\dot{V}_A &= \ddot{x} \sin \varphi - \ddot{y} \cos \varphi + \dot{\varphi} (\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi), \\
\dot{V}_B &= \ddot{\xi},
\end{aligned} \tag{1.254}$$

на основу (1.253), као и после краћег сређивања, добија се

$$\begin{aligned}
m_A \dot{V}_A &= -\dot{m}_A v + F_1, \\
m_B \dot{V}_B &= -k(\xi - l_0 - L) - \dot{m}_B v + F_2,
\end{aligned} \tag{1.255}$$

док се Лагранжеви множитељи веза Λ_3 и Λ_4 могу изразити у следећем облику

$$\begin{aligned}
\Lambda_3 &= m_A \xi \dot{\varphi}^2 - k(\xi - l_0 - L), \\
\Lambda_4 &= m_B \dot{\xi} \dot{\varphi}.
\end{aligned} \tag{1.256}$$

У наставку биће изложен поступак формирања диференцијалних једначина кретања разматраног нехолономног механичког система променљиве масе користећи опште теореме динамике. На основу теореме о промени количине кретања [Килчевский, 1977] механичког система променљиве масе, можемо писати

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}_R^s + \sum_{p=1}^N \dot{m}_p \vec{v}_p^{rel}, \tag{1.257}$$

где је \vec{F}_R^s главни вектор спољашњих сила, док се масе тачака система сматрају константим величинама приликом диференцирања по времену вектора количине кретања \vec{K} . Вектор количине кретања разматраног механичког система одређен је као

$$\vec{K} = m_A \vec{V}_A + m_B \vec{V}_B. \tag{1.258}$$

На основу (1.257) и (1.258), векторска диференцијална једначина кретања гласи

$$m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B = \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m_A \vec{g} + m_B \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \dot{m}_A \vec{v}_A^{rel} + \dot{m}_B \vec{v}_B^{rel}, \quad (1.259)$$

којој одговарају две скаларне диференцијалне једначине кретања у односу на осе $A\xi$ и $A\eta$ покретног координатног система респективно

$$\begin{aligned} m_A a_{A\xi} + m_B a_{B\xi} &= -R_A - \dot{m}_B v + F_2, \\ m_A a_{A\eta} + m_B a_{B\eta} &= R_B + \dot{m}_A v - F_1. \end{aligned} \quad (1.260)$$

Како су компоненте вектора убрзања тачака A и B система одређене као

$$\begin{aligned} a_{A\xi} &= \xi \dot{\phi}^2 = \dot{\phi} V_A, & a_{A\eta} &= -\dot{V}_A, \\ a_{B\xi} &= \dot{V}_B = \ddot{\xi}, & a_{B\eta} &= \dot{\xi} \dot{\phi} = \frac{V_A V_B}{\xi}, \end{aligned} \quad (1.261)$$

једначине (1.260) добијају следећи облик

$$\begin{aligned} m_A V_A \dot{\phi} + m_B \dot{V}_B &= -R_A - \dot{m}_B v + F_2, \\ -m_A \dot{V}_A + m_B \frac{V_A V_B}{\xi} &= R_B + \dot{m}_A v - F_1. \end{aligned} \quad (1.262)$$

На основу теореме о промени момента количине кретања механичког система променљиве масе у односу на покретну тачку A , можемо писати

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} + \vec{V}_A \times \vec{K} = \vec{M}_A^s + \sum_{p=1}^N \overline{AM_p} \times \dot{m}_p \vec{v}_p^{rel}, \quad (1.263)$$

где је \vec{M}_A^s главни момент спољашњих сила у односу на тачку A , док се масе тачака система такође сматрају константим величинама приликом диференцирања по времену вектора момента количине кретања \vec{L}_A . Како је $L_{A\delta} = 0$ у разматраном примеру, векторској једначини (1.263) одговара следећа скаларна једначина у односу на осу $A\xi$

$$m_B V_A V_B = R_B \xi. \quad (1.264)$$

На основу теореме о промени количине кретања за штап BD (штап BD је занемарљиве масе), можемо писати

$$m_B \dot{V}_B = F_2 - \dot{m}_B v - k(\xi - l_0 - L). \quad (1.265)$$

На основу (1.262), (1.264) и (1.265) добија се

$$\begin{aligned}
 m_A \dot{V}_A &= -\dot{m}_A v + F_1, \\
 m_B \dot{V}_B &= -\dot{m}_B v - k(\zeta - l_0 - L) + F_2, \\
 R_B &= m_B \frac{V_A V_B}{\zeta} = m_B \dot{\phi} \dot{\zeta} = \Lambda_4, \\
 R_A &= -m_A V_A \dot{\phi} + k(\zeta - l_0 - L) = -\Lambda_3,
 \end{aligned} \tag{1.266}$$

чиме је уједно доказана потпуна еквивалентност изведене форме, применом општих теореме динамике, са претходно изведеним формама, ако се има у виду да су $\ddot{\pi}^1 = \dot{V}_A$ и $\ddot{\pi}^2 = \dot{V}_B$. Предложени поступак формирања диференцијалних једначина кретања разматраног система применом општих теорема динамике је знатно једноставнији у овом примеру у односу на класичне поступке формирања у механици нехолономних система.

1.3.2 Чаплигинове саонице

У циљу формирања диференцијалних једначина кретања Чаплигинових саоница, неопходно је најпре увести два Декартова координатна система референције. Непокретни координатни систем $Oxyz$, чија координатна равна Oxy се поклапа са хоризонталном равни кретања, и покретни координатни систем $A\xi\epsilon\delta$ који је круто везан за сечиво, тако да се координатна равна $A\xi\epsilon$ поклапа са равни Oxy , где се оса $A\xi$ поклапа са правцем сечива (видети слику 1.2). Јединични вектори оса ξ, ϵ и δ покретног координатног система су $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ и $\bar{\nu}$ респективно. Конфигурација сечива у односу на систем Oxy дефинисана је скупом Лагранжевих координата (q^1, q^2, q^3) , где је $q^1 = \varphi$ угао између осе Ox и осе $A\xi$, док су $q^2 = x$ и $q^3 = y$ Декартове координате тачке A . Даља анализа ће се односити на случај када се тачки A не дозвољава кретање у правцу управном на сечиво, услед чега се јавља хоризонтална реакција $\bar{R} = R\bar{\mu}$ непокретне површи. Кретање Чаплигинових саоница ограничено је једном идеалном нехолономном хомогеном везом

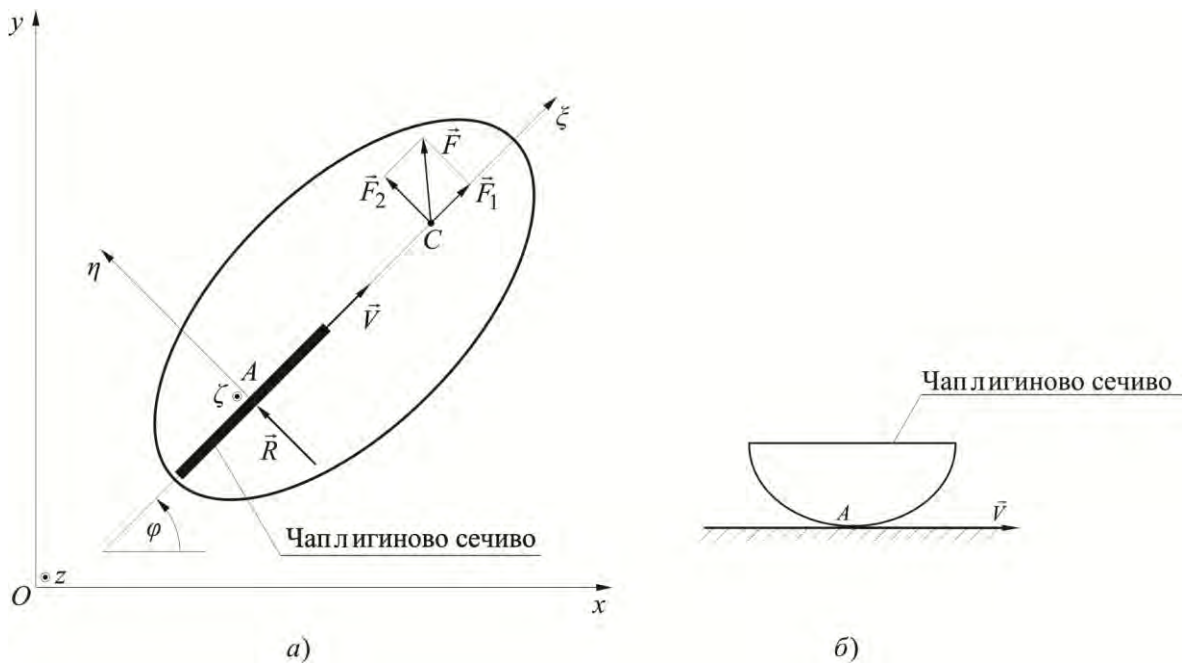
$$\psi \equiv -\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi = 0. \tag{1.267}$$

За независне квазибрзине изаберимо угаону брзину ω саоница, као и брзину V тачаке A сечива

$$\begin{aligned}\dot{\pi}^1 &= \omega = \dot{\varphi}, \\ \dot{\pi}^2 &= V = \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi,\end{aligned}\quad (1.268)$$

где су $\omega = \vec{\omega} \cdot \vec{v}$ и $V = \vec{V} \cdot \vec{\lambda}$. Центар маса саоница налази се на оси $A\zeta$, односно $C \in A\zeta$, на растојању $\overline{AC} = a$. Маса сечива је m , док је I_C момент инерције око главне централне осе инерције управне на раван Oxy . Нека у тачки C саоница дејствује непотенцијална сила \vec{F} . Све генералисане брзине сада се могу изразити у функцији независних квазибрзина

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{x} &= V \cos \varphi, \\ \dot{y} &= V \sin \varphi.\end{aligned}\quad (1.269)$$



Слика 1.2 а) Чаплигинове саонице; б) Чаплигиново сечиво

Кинетичка енергија саоница одређена је следећим изразом

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2 k^2 \dot{\varphi}^2 + 2a\dot{\varphi}(-\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi) \right], \quad (1.270)$$

где је $k^2 = 1 + I_C / (ma^2)$. Израз за кинетичку енергију T^* саоница, која је функција независних квазибрзина, гласи

$$T^* = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \dot{\pi}^\alpha \dot{\pi}^\beta = \frac{1}{2} m (V^2 + a^2 k^2 \omega^2). \quad (1.271)$$

Сада се могу формирати диференцијалне једначине кретања саоница у коваријантном облику

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= F_1 + ma\omega^2, \\ mak^2\dot{\omega} &= F_2 - mV\omega, \end{aligned} \quad (1.272)$$

где су $F_1 = \vec{F} \cdot \vec{\lambda}$ и $F_2 = \vec{F} \cdot \vec{\mu}$. Сада ће диференцијалне једначине кретања саоница бити формиране на основу Лагранжевих једначина друге врсте са неодређеним множитељима

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i + \Lambda_\nu \frac{\partial \psi^\nu}{\partial \dot{q}^i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.273)$$

На основу (1.267), (1.270) и (1.273), диференцијалне једначине кретања саоница, које одговарају генерализаним координатама φ, x и y респективно, имају следећи облик

$$\begin{aligned} ma \left[ak^2 \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} (\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi) \right] &= aF_2, \\ m \left(\ddot{x} - a\ddot{\varphi} \sin \varphi - a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \right) &= F_1 \cos \varphi - F_2 \sin \varphi - \Lambda \sin \varphi, \\ m \left(\ddot{y} + a\ddot{\varphi} \cos \varphi - a\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) &= F_1 \sin \varphi + F_2 \cos \varphi + \Lambda \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.274)$$

Ако се има у виду да су

$$\begin{aligned} V\dot{\varphi} &= -\ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi, \\ \dot{V} &= \ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (1.275)$$

на основу (1.274) и (1.275), може се формирати следећи систем једначина

$$\begin{aligned} m \left(ak^2 \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} V \right) &= F_2, \\ m \left(\dot{V} - a\dot{\varphi}^2 \right) &= F_1, \end{aligned} \quad (1.276)$$

док се множитељ везе Λ може изразити у следећем облику

$$\Lambda = -\ddot{\phi} \frac{I_C}{a}. \quad (1.277)$$

Сада ће диференцијалне једначине кретања саоница бити формиране на основу теореме о промени количине кретања, као и теореме о промени момента количине кретања у односу на центар маса C саоница

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}}{dt} &= \vec{F}_R^s, \\ \frac{d\vec{L}_C}{dt} &= \vec{M}_C^s, \end{aligned} \quad (1.278)$$

где је $\vec{K} = m\vec{V}_C = m(V\vec{\lambda} + a\dot{\phi}\vec{\mu})$ вектор количине кретања саоница, док је $\vec{L}_C = I_C\dot{\phi}\vec{v}$ момент количине кретања саоница у односу на центар маса C саоница. Главни вектор сила је $\vec{F}_R^s = \vec{F} + \vec{R} + m\vec{g} + \vec{N}$, где је \vec{N} нормална реакција хоризонталне равни кретања, док је $M_{C\delta}^s = \vec{M}_C^s \cdot \vec{v} = -aR$ главни момент сила за центар маса C саоница у односу на осу δ , имајући у виду да сила \vec{F} дејствује у тачки C . Векторским једначинама (1.278) одговарају следеће скаларне диференцијалне једначине у односу на осе $A\zeta, A\epsilon$ и $A\delta$ покретног координатног система респективно

$$\begin{aligned} m(\dot{V} - a\dot{\phi}^2) &= F_1, \\ m(a\ddot{\phi} + V\dot{\phi}) &= F_2 + R, \\ I_C\ddot{\phi} &= -aR. \end{aligned} \quad (1.279)$$

Потпуна еквивалентност система (1.272), (1.276) и (1.279) је очигледна, док је Лагранжев множитељ везе једнак реакцији нехолономне везе, односно $\Lambda = R$.

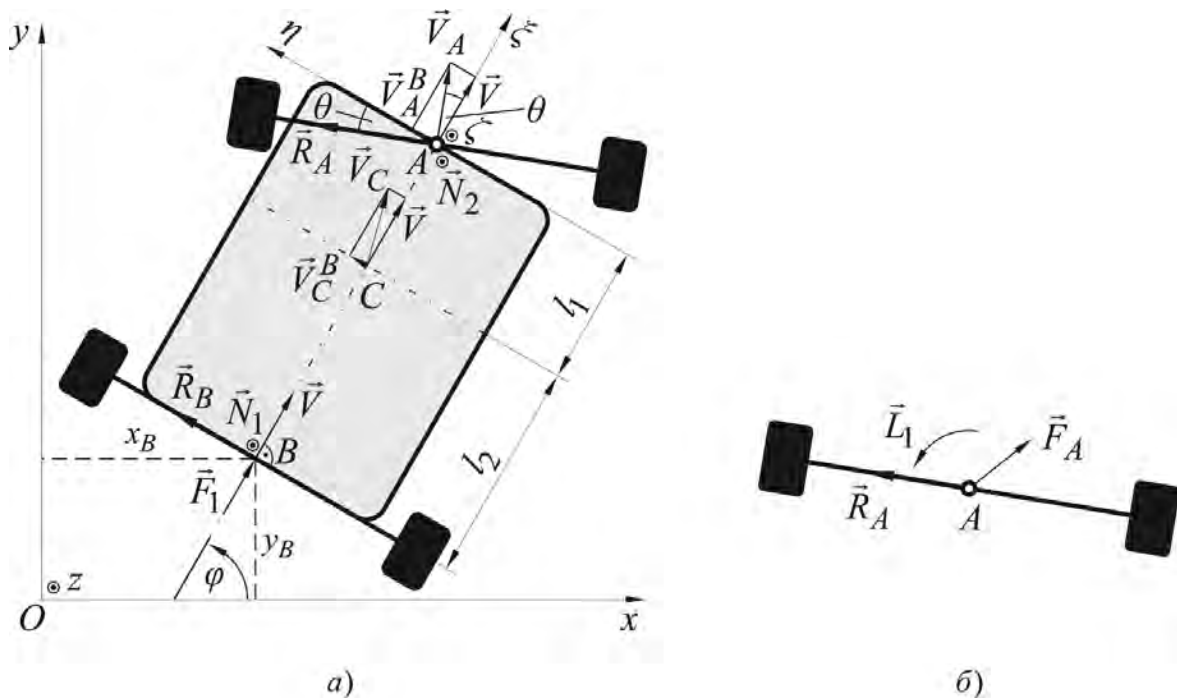
1.3.3 Упрошћен модел возила

У циљу формирања диференцијалних једначина кретања нехолономног механичког система, на примеру једног упрошћеног модела возила [Soltakhanov, Yushkov, Zegzhda, 2009] (видети слику 1.3), неопходно је најпре увести два Декартова координатна система референције. Непокретни координатни систем $Oxyz$, чија координатна раван Oxy се поклапа са хоризонталном равни кретања возила и

покретни координатни систем $A\zeta\varepsilon\delta$, који је круто везан за тело возила, тако да се координатна равна $A\zeta\varepsilon$ поклапа са равни Oxy . Оса покретног координатног система $A\zeta$ одређена је правцем нормале на осу задње осовине возила и тачком C , где је $C \in A\zeta$. Тачка C представља центар маса тела возила, док је тачка A центар маса предње осовине и дато је $\overline{BC} = l_2$ и $\overline{CA} = l_1$. Јединични вектори оса ζ, ε и δ покретног координатног система су $\vec{\lambda}, \vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$ респективно. Упрошћени модел возила састоји се од тела возила масе M_1 и предње осовине масе M_2 . Моменти инерција тела возила и предње осовине око главних централних оса инерције управних на равна $A\zeta\varepsilon$ су J_1 и J_2 респективно, где је $J_1 \gg J_2$. Маса задње осовине и масе точкава се занемарују. Конфигурација возила у односу на систем Oxy дефинисана је скупом Лагранжевих координата (q^1, q^2, q^3, q^4) , где је $q^1 = \varphi$ угао између осе Ox и осе $A\zeta$, $q^2 = \theta$ угао између осе $A\eta$ и осе предње осовине возила, док су $q^3 = x_B$ и $q^4 = y_B$ Декартове координате тачке B . Даља анализа ће се односити на случај када се тачки A не дозвољава кретање у правцу осе предње осовине, док се тачки B возила не дозвољава кретање у правцу осе задње осовине (не дозвољава се бочно проклизавање предње и задње осовине). Кретање возила ограничено је са две идеалне независне нехолономне хомогене везе

$$\begin{aligned} \psi^3 &\equiv -\dot{x}_B \sin \varphi + \dot{y}_B \cos \varphi = 0, \\ \psi^4 &\equiv -\dot{x}_A \sin(\varphi + \zeta) + \dot{y}_A \cos(\varphi + \zeta) = 0, \end{aligned} \quad (1.280)$$

где су $x_A = x_B + (l_1 + l_2) \cos \varphi$ и $y_A = y_B + (l_1 + l_2) \sin \varphi$. Услед наметнутих ограничења кретања јављају се хоризонталне реакције $\vec{R}_A = -R_A \sin \theta \vec{\lambda} + R_A \cos \theta \vec{\mu}$ и $\vec{R}_B = R_B \vec{\mu}$ респективно.



Слика 1.3 а) Упростићен модел возила; б) Предња осовина

На возило током кретања дејствује погонска сила $\vec{F}_1 = F_1(t)\vec{\lambda}$ у тачки B задње осовине, као и унутрашњи управљачки момент $\vec{L}_1 = L_1(t)\vec{v}$ око вертикалне осе $A\delta$. За независне квазибрзине изаберимо брзину V тачке B возила, као и релативну угаону брзину ω_θ предње осовине респективно

$$\begin{aligned}\dot{\pi}^1 &= V = \dot{x}_B \cos \varphi + \dot{y}_B \sin \varphi, \\ \dot{\pi}^2 &= \omega_\zeta = \dot{\zeta},\end{aligned}\tag{1.281}$$

где су $V = \vec{V} \cdot \vec{\lambda}$ и $\omega_\theta = \vec{\omega}_\theta \cdot \vec{v}$. Све генералисане брзине сада се могу изразити у функцији независних квазибрзина

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{V}{l} \tan \zeta, \\ \dot{\zeta} &= \omega_\zeta, \\ \dot{x}_B &= V \cos \varphi, \\ \dot{y}_B &= V \sin \varphi,\end{aligned}\tag{1.282}$$

где је $l = l_1 + l_2$ међуосовинско растојање. Кинетичка енергија возила дата је следећим изразом

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \left[M_1 V_C^2 + M_2 V_A^2 + J_1 \dot{\varphi}^2 + J_2 (\dot{\varphi} + \dot{\zeta})^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} M (\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2) + (-\dot{x}_B \sin \varphi + \dot{y}_B \cos \varphi) (M l_2 + M_2 l_1) \dot{\varphi} + \frac{1}{2} J^* \dot{\varphi}^2 + J_2 \dot{\varphi} \dot{\zeta} + \frac{1}{2} J_2 \dot{\zeta}^2,
\end{aligned} \tag{1.283}$$

где су $M = M_1 + M_2$, $J = J_1 + J_2$ и $J^* = M_1 l_2^2 + M_2 l_1^2 + J$. Израз за кинетичку енергију T^* возила, која је функција независних квазибрзина V и ω_ζ , гласи

$$T^* = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \dot{\pi}^\alpha \dot{\pi}^\beta = \frac{1}{2} \left(M + \frac{J^*}{l^2} \tan^2 \zeta \right) V^2 + \frac{J_2}{l} \tan \zeta V \omega_\zeta + \frac{1}{2} J_2 \omega_\zeta^2. \tag{1.284}$$

Диференцијалне једначине кретања возила у коваријантном облику имају следећи облик

$$\begin{aligned}
\left(M + \frac{J^*}{l^2} \tan^2 \zeta \right) \dot{V} + \frac{J_2}{l} \tan \zeta \dot{\omega}_\zeta &= F_1 - \frac{J^*}{l^2} \frac{\tan \zeta}{\cos^2 \zeta} V \omega_\zeta, \\
\frac{J_2}{l} \tan \zeta \dot{V} + J_2 \dot{\omega}_\zeta &= L_1 - \frac{J_2}{l} \frac{1}{\cos^2 \zeta} V \omega_\zeta,
\end{aligned} \tag{1.285}$$

где је $\cos \zeta = V / \sqrt{V^2 + l^2 \dot{\varphi}^2}$. Сада ће диференцијалне једначине кретања возила бити формиране на основу Лагранжевих једначина друге врсте са неодређеним множитељима

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i + \Lambda_\nu \frac{\partial \psi^\nu}{\partial \dot{q}^i}, \quad i = \overline{1, 4}. \tag{1.286}$$

На основу (1.281), (1.284) и (1.287), диференцијалне једначине кретања возила, које одговарају генерализаним координатама φ, ζ, x_B и y_B респективно, имају следећи облик

$$\begin{aligned}
J^* \ddot{\varphi} + J_2 \ddot{\zeta} + (-\ddot{x}_B \sin \varphi + \ddot{y}_B \cos \varphi) (M l_2 + M_2 l_1) &= \Lambda_4 l \cos \zeta, \\
J_2 (\ddot{\varphi} + \ddot{\zeta}) &= L_1, \\
M \ddot{x}_B - (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) (M l_2 + M_2 l_1) &= F_1 \cos \varphi - \Lambda_3 \sin \varphi - \Lambda_4 \sin(\varphi + \zeta), \\
M \ddot{y}_B + (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) (M l_2 + M_2 l_1) &= F_1 \sin \varphi + \Lambda_3 \cos \varphi + \Lambda_4 \cos(\varphi + \zeta).
\end{aligned} \tag{1.287}$$

Ако се има у виду да су

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= \frac{\dot{V}}{l} \tan \zeta + \frac{V}{l} \frac{\dot{\zeta}}{\cos^2 \zeta}, \\ \dot{V} &= \ddot{x}_B \cos \varphi + \ddot{y}_B \sin \varphi, \\ V\dot{\varphi} &= -\ddot{x}_B \sin \varphi + \ddot{y}_B \cos \varphi,\end{aligned}\tag{1.288}$$

на основу (1.288) и (1.289), може се формирати следећи систем једначина

$$\begin{aligned}M\dot{V} + \frac{\dot{\varphi}}{V} (J^* \ddot{\varphi} + J_2 \ddot{\zeta}) &= F_1, \\ J_2 (\ddot{\varphi} + \ddot{\zeta}) &= L_1,\end{aligned}\tag{1.289}$$

док се множитељи веза Λ_3 и Λ_4 могу изразити у следећем облику

$$\begin{aligned}\Lambda_3 &= \frac{1}{l} [M_1 l_1 V \dot{\varphi} + (M_1 l_1 l_2 - J) \ddot{\varphi} - J_2 \ddot{\zeta}], \\ \Lambda_4 &= \frac{\sqrt{V^2 + l^2 \dot{\varphi}^2}}{lV} [J^* \ddot{\varphi} + J_2 \ddot{\zeta} + (M l_2 + M_2 l_1) V \dot{\varphi}].\end{aligned}\tag{1.290}$$

Сада ће диференцијалне једначине кретања возила бити формиране на основу теореме о промени количине кретања, као и теореме о промени момента количине кретања за покретну тачку B возила

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{K}}{dt} &= \vec{F}_R^S, \\ \frac{d\vec{L}_B}{dt} + \vec{V}_B \times \vec{K} &= \vec{M}_B^S,\end{aligned}\tag{1.291}$$

где је

$$\vec{K} = [M\dot{x}_B - (M l_2 + M_2 l_1) \dot{\varphi} \sin \varphi] \vec{i} + [M\dot{y}_B + (M l_2 + M_2 l_1) \dot{\varphi} \cos \varphi] \vec{j},\tag{1.292}$$

вектор количине кретања возила, док је

$$\vec{L}_B = (J^* \dot{\varphi} + J_2 \dot{\zeta}) \vec{k}.\tag{1.293}$$

кинетички момент возила у односу на тачку B . Векторским једначинама (1.291) одговарају следеће скаларне диференцијалне једначине кретања возила у односу на осе $A\zeta$, $A\varepsilon$ и $A\delta$ покретног координатног система респективно

$$\begin{aligned}
\left[M(\ddot{x}_B \cos \varphi + \ddot{y}_B \sin \varphi) - (Ml_2 + M_2l_1)\dot{\varphi}^2 \right] &= F_1 - R_A \sin \zeta, \\
\left[M(-\ddot{x}_B \sin \varphi + \ddot{y}_B \cos \varphi) + (Ml_2 + M_2l_1)\ddot{\varphi} \right] &= R_B + R_A \cos \zeta, \\
J^*\ddot{\varphi} + J_2\ddot{\zeta} + (Ml_2 + M_2l_1)\frac{\dot{\varphi}^2 l}{\tan \zeta} &= R_A l \cos \zeta,
\end{aligned} \tag{1.294}$$

док диференцијална једначина обртања предње осовине, око вертикалне осе $A\delta$, има следећи облик

$$J_2(\ddot{\varphi} + \ddot{\zeta}) = L_1. \tag{1.295}$$

Ако се имају у виду релације (1.288), на основу једначина (1.294) и (1.295), могуће је изразити реакције R_A и R_B нехолономних веза, као и погонску силу F_1 и управљачки момент L_1 у функцији дефинисаних величина и њихових изода, у следећем облику

$$\begin{aligned}
R_A &= \frac{\sqrt{V^2 + l^2 \dot{\varphi}^2}}{lV} \left[J^*\ddot{\varphi} + J_2\ddot{\zeta} + (Ml_2 + M_2l_1)V\dot{\varphi} \right], \\
R_B &= \frac{1}{l} \left[M_1l_1V\dot{\varphi} + (M_1l_1l_2 - J)\ddot{\varphi} - J_2\ddot{\zeta} \right], \\
F_1 &= M\dot{V} + \frac{\dot{\varphi}}{V} (J^*\ddot{\varphi} + J_2\ddot{\zeta}), \\
L_1 &= J_2(\ddot{\varphi} + \ddot{\zeta}).
\end{aligned} \tag{1.296}$$

Литература

- Ajzenhart, L. P.: Uvod u diferencijalnu geometriju, Naučna Knjiga, Beograd, 1951.
- Anđelić, T.: O jednom obliku diferencijalnih jednačina kretanja neholonomnog sistema bez multiplikatora veza, Matematički vesnik, 4(19), pp. 359-366, 1967.
- Anđelić, T., Stojanović, R.: Racionalna mehanika, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd, 1965.
- Anđelić, T.: Tenzorski račun, Naučna Knjiga, Beograd, 1967.
- Bahar, L., Kwatny, H.: Extension of Noether's theorem to constrained non-conservative dynamical systems, Int. J. Nonlinear Mech., 22, pp. 125–138, 1987.
- Bakša, A.: Racionalna mehanika, Beograd, 2000.
- Bilimović, A.: Racionalna mehanika, Naučna knjiga, Beograd, 1951.
- Bloch, A. M., Krishnaprasad, P. S., Marsden, J. E., Ratiu, T.S.: The Euler–Poincaré equations and double bracket dissipation, Communications in Mathematical Physics, 175(2), pp. 1–42, 1996.
- Bloch, A. M., Marsden, J. E., Zenkov, D.: Quasi-velocities and symmetries in nonholonomic systems, Preprint, 2009.
- Bloch, A. M.: Nonholonomic Mechanics and Control, Springer, Berlin, 2003.
- Čović, M. V.: Napomena o integralnim varijacionim principima, 15. jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Kupari, 1981.
- Čović, M. V.: On the First Integrals of Rheonomic Holonomic Mechanical Systems, ZAMM, 67(5), 1987.
- Čović, M. V.: Penleveov integral i princip stacionarnog dejstva, 19. jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Ohrid, 1990.
- Čović, V.: Diferencijalne jednačine i stabilnost kretanja neholonomnih sistema sa primenom na dinamiku objekata, Doktorska disertacija, Beograd, 1976.
- Crouch, P., Silva Leite, F.: The dynamic interpolation problem: on Riemannian manifolds, Lie groups, and symmetric spaces, Journal of Dynamical and Control Systems, 1(2), pp. 177–202, 1995.
- Cvetičanin, L.: Dynamics of machines with variable mass, Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1998.

- Đukić, Đ. S.: Note on the disturbed equations of motion in the nonholonomic coordinates, *Annali di Matematica*, 96(4), pp. 141-148, 1973.
- Đukić, Đ.: Zakoni održanja klasične mehanike u neholonomnim koordinatama, 12. jugoslovenski kongres racionalne i primenjene mehanike, Ohrid, 1974.
- Đukić, Đ.: Conservation laws in classical mechanics for quasicordinates, *Arch. Ret. Mech. Anal*, 56, pp. 79–98 , 1974.
- Eisenhart, L.: *Riemannian geometry*, Princeton Univ. Press, 1926.
- Gantmaher, F. R.: *Analitička mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd, 1964.
- Ghori, Q. K., Hussain, M.: Poincares equarions for a nonholonomics dynamical system, *ZAMM*, 53, pp. 391-396, 1973.
- Greenwood, D. T.: *Classical Dynamics*, Dover: New York, 1997.
- Huston, R. L., Passarello, C. E.: Another look at nonholonomic system, *J. Appl. Mechanics*, pp. 101-104, 1973.
- Jeremić, O.: *Prilog dinamici reonomnih sistema*, Doktorska disertacija, Beograd, 1998.
- Johnsen, L.: *Dynamique générale des systems nonholonomiques*, *Skrifter Unigitt. Av. Det. Norske Videnkaps. Akademi i. Oslo, I Mat. Nat. Klass*, 4, pp. 1-75, 1941.
- Kovačić, I.: *Metoda polja u neholonomnoj mehanici i teoriji nelinearnih oscilacija*, Doktorska disertacija, Novi Sad, 2002.
- Lurie, A. I.: *Analytical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- Maruskin, J. M., Bloch, A. M., Marsden, J. E., Zenkov, D.: *A geometric foundation of quasi-velocities in nonholonomic and variational nonholonomic systems*, Preprint, 2009.
- Mušicki, Đ., Zeković, D. N.: Energy integrals for the systems with nonholonomic constraints of arbitrary form and origin, *Acta Mech.*, 227, pp. 467-493, 2016.
- Neimark J. I., Fufaev, N. A.: *Dynamics of Nonholonomic Systems*, Nauka, Moscow, 1967.
- Papastavridis, J. G.: *Analytical Mechanics*, Oxford University Press: Oxford, 2002.
- Papastavridis, J.: On energy rate theorems for linear firstorder nonholonomic systems, *J. Appl. Mech.*, 58, pp. 538–544 , 1991.
- Pars, L. A.: *A treatise on analutycal mechanics*, London: Heinemann, 1968.
- Ray, J.: Nonholonomics Constraints, *Am. J. of Physics*, 34(12), 1966.

- Rumjantzev, V. V., Sumbatov, A. S.: On the problem of a generalization of the Hamilton-Jacobi method for nonholonomic systems, *ZAMM*, 58, pp. 477-481, 1978.
- Rumjantzev, V. V.: Forms of Hamilton's principle for nonholonomic systems, *Facta Universitatis*, 2(10), pp. 1035-1048, 2000.
- Rund, H.: The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations, London: D Van Nostrand Company LTD, 1966.
- Soltakhanov, Sh. Kh., Yushkov, M. P., Zegzhda, S. A. : Mechanics of non-holonomic systems, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- Stojanović, R.: Osnovi diferencijalne geometrije, GraĐevinska knjiga, Beograd, 1963.
- Sutela, T., Vujanović, B.: Motion of a nonconservative dynamical system via a complete integral of a partial differential equation, *Tensor (NS)*, 38, pp. 303-310, 1982.
- Teodorescu, P.: Mechanical Systems, Classical Mechanics, 3, Analytical Mechanics, Springer-Science (Translated from Rumanian), 2009.
- Udwadia, F. E., Kalaba, R. E.: A new perspective of constrained motion, *Proceedings, Mathematical and Physical Sciences*, 39, Issue 1906, pp. 407-410, 1992.
- Udwadia, F. E., Kalaba, R. E.: Fundamental principles of Lagrangian dynamics: Mechanical systems with non-ideal holonomic and non-holonomic constraints, *Journal of mathematical analysis and application*, 251, pp. 341-355, 2000.
- Van Dooren, R.: Derivation of the Lagrange equations for nonholonomic Chetaev from a modified Pontryagin maximum principle, *ZAMP*, 28, 729-734, 1977.
- Van Dooren, R.: Motion of a rolling disc by a new generalized Hamilton-Jacobi method, *ZAMP*, 27, pp. 501-505, 1976.
- Van Dooren, R.: The generalized Hamilton-Jacobi method for nonholonomic dynamical systems of Chetaev's type, *ZAMP*, 55, pp. 407-411, 1975.
- Vujanović, B.: On a gradient method in nonconservative mechanics, *Acta mechanica*, 34, pp. 167-179, 1979.
- Vujičić, A. V.: Preprincipi mehanike, Beograd, 2013.
- Vujičić, A. V.: The modification of Analytical Dynamics of Rheonomic Systems, *Tensor*, 46, Novi Sad, 1987.
- Vujičić, V.: Dynamics of rheonomic systems, Matematički Institut, Beograd, 1990.

Zeković, D. N.: Dynamics of mechanical systems with nonlinear nonholonomic constraints – I The history of solving the problem of a material realization of a nonlinear nonholonomic constraint, *ZAMM*, 91(11), pp. 899–922, 2011.a.

Zeković, D. N.: Dynamics of mechanical systems with nonlinear nonholonomic constraints – II Differential equations of motion, *ZAMM*, 91(11), pp. 899–922, 2011.b.

Zeković, D. N.: Dynamics of mechanical systems with nonlinear nonholonomic constraints – III Analysis of motion, *ZAMM*, 93(8), pp. 550–574, 2013.

Zeković, D. N.: Energy integrals for mechanical systems with nonlinear nonholonomic constraints, *Int. Jor. of Non-Linear Mech.*, 73, pp. 108-113, 2015.

Zeković, D. N.: On the motion of a nonholonomically constrained system in the nonresonance case, *Mechanics Research Communications*, 38(4), pp. 330-333, 2011.c.

Zeković, D.: Neki problemi dinamike neholonomnih sistema primenom na tehničke objekte, *Doktorska disertacija*, Beograd, 1983.

Кильчевский, Н. А: Курс теоретической механики, *Том II*, Москва, 1977.

Поглавље 2

Глобални минимум времена при брахистохроном кретању материјалне тачке са ограниченом реакцијом везе

2.1 Формулација проблема оптималног управљања

Разматра се кретање материјалне тачке M , масе m , у вертикалној равни xOy Декартовог правоуглог координатног система референције, где је оса Oy усмерена вертикално навише. Јединични вектори оса Ox и Oy су \vec{i} и \vec{j} респективно. Тачка M креће се дуж глатке криве линије, која се третира као задржавајућа (билатерална) веза, у хомогеном гравитационом пољу силе Земљине теже. Тачка започиње кретање из положаја $M_0(x_0, y_0)$, при познатој вредности укупне механичке енергије

$$E = T + \Pi = E_0,^{27} \quad (2.1)$$

где су

$$T = \frac{1}{2}mV^2 \quad \text{и} \quad (2.2)$$

²⁷ Имајући у виду да се тачка M креће у хомогеном гравитационом пољу силе Земљине теже, важи „закон” о одржању укупне механичке енергије $T + \Pi = \text{const.}$.

$$\Pi = mgy, \quad (2.3)$$

кинетичка и потенцијална енергија тачке респективно, док је $E_0 \in \mathbb{R}$ вредност механичке енергије тачке у почетном тренутку $t_0 = 0$. Класичан брахистохрони проблем састоји се у одређивању облика криве (брахистохроне) $y = y(x)$, која ће обезбедити да тачка, која започиње кретање из положаја $M_0(x_0, y_0)$ са почетном брзином²⁸ одређеном на основу (2.1), (2.2) и (2.3)

$$V_0 = \pm \sqrt{2 \left(\frac{E_0}{m} - gy_0 \right)}, \quad (2.4)$$

где је $V_0 = \vec{V}_0 \cdot \vec{t}$ ²⁹, стигне у унапред одређен положај $M_f(x_f, y_f)$ за најкраће време t_f , где је $y_0 \leq \frac{E_0}{mg}$. Сада се брахистохрони проблем може поставити и у следећем облику: потребно је одредити облик криве $y = y(x)$, која ће обезбедити да тачка, која започиње кретање из положаја $M_0(x_0, y_0)$ са почетном брзином (2.4), стигне на унапред одређену многострукост облика

$$\Psi_f(x, y) = 0, \quad (2.5)$$

за најкраће време t_f . Најпре ће бити разматран случај неограничене, а затим и случај ограничене пројекције силе реакције везе до фиксних граница

$$N^* \leq N_n \leq N^{**}, \quad (2.6)$$

где су $N^* < 0$ и $N^{**} > 0$ дате константе, док је $N_n = \vec{N} \cdot (d\vec{t} / d\varphi)$ пројекција силе реакције везе на правац одређен јединичним вектором $d\vec{t} / d\varphi$ (видети [Šalinić, 2009]) о коме ће у наставку бити више речи. Векторска диференцијална једначина кретања тачке M гласи

²⁸ У изворном брахистохроном проблему тачка започиње кретање из координатног почетка $O(0,0)$, при чему је оса Oy усмерена вертикално наниже, без почетне брзине.

²⁹ Где је \vec{t} јединични вектор тангенте на трајекторију у тачки M .

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}, \quad (2.7)$$

где је $\vec{g} = -g\vec{j}$ убрзање силе Земљине теже, док је \vec{N} сила реакција везе³⁰.

Како су

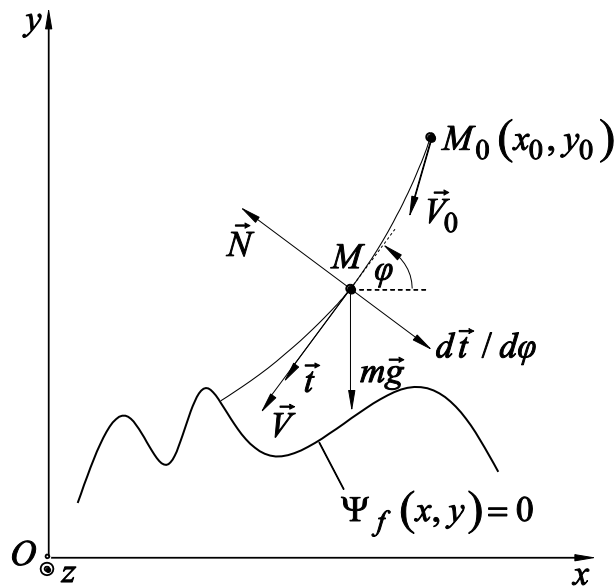
$$\vec{t} = (-\cos\varphi)\vec{i} + (-\sin\varphi)\vec{j} \quad \text{и} \quad \frac{d\vec{t}}{d\varphi} = (\sin\varphi)\vec{i} + (-\cos\varphi)\vec{j}, \quad (2.8)$$

убрзање тачке може се написати у следећем облику [Šalinić, 2009]

$$\vec{a} = \dot{V}\vec{t} + V\dot{\varphi}\frac{d\vec{t}}{d\varphi}, \quad (2.9)$$

где је $d\vec{t}/d\varphi$ јединични вектор који је нормалан на вектор \vec{t} , тј. $(d\vec{t}/d\varphi) \cdot \vec{t} = 0$.

Очигледно је да јединични вектор $d\vec{t}/d\varphi$, за разлику од јединичног вектора нормале \vec{n} , не мења оријентацију са променом конкавности криве и да је стално усмерен на „истој страни” као и \vec{g} , што је разлог за увођење јединичног вектора $d\vec{t}/d\varphi$.



Слика 2.1 Материјална тачка у хомогеном гравитационом пољу силе Земљине теже
Кинематичке једначине кретања тачке M су

³⁰ Како се разматра кретање тачке дуж идеално глатке везе, линија дејства силе реакције \vec{N} везе колинеарна је са јединичним вектором $d\vec{t}/d\varphi$.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -V \cos \varphi, \\ \dot{y} &= -V \sin \varphi,\end{aligned}\tag{2.10}$$

где је $V = \vec{V} \cdot \vec{t}$. Векторској диференцијалној једначини кретања (2.7), одговарају следеће скаларне диференцијалне једначине у односу на правце одређене јединичним векторима \vec{t} и $d\vec{t}/d\varphi$ респективно

$$\begin{aligned}m\dot{V} &= mg \sin \varphi, \\ mV\dot{\varphi} &= mg \cos \varphi + N_n,\end{aligned}\tag{2.11}$$

где су $N_t = \vec{N} \cdot \vec{t} \equiv 0$ и $N_n = \vec{N} \cdot (d\vec{t}/d\varphi)$. Са променом конкавности криве, пројекција N_n силе реакције везе неће променити знак, што је још један од разлога за увођење вектора $d\vec{t}/d\varphi$. На основу (2.10) и (2.11), могу се формирати диференцијане једначине првог реда у нормалном облику, познате под називом једначине стања

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -V \cos \varphi, \\ \dot{y} &= -V \sin \varphi, \\ \dot{V} &= g \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{V} g \cos \varphi + \frac{1}{mV} u,\end{aligned}\tag{2.12}$$

које описују кретање разматране тачке у простору стања, где је као управљачка променљива узета пројекција силе реакције везе $u = N_n$, са следећим почетним и крајњим условима

$$t_0 = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad V(t_0) = \pm \sqrt{2 \left(\frac{E_0}{m} - gy_0 \right)},\tag{2.13}$$

$$t = t_f, \quad \Psi_f(x_f, y_f) = 0,\tag{2.14}$$

где су $x_f = x(t_f)$ и $y_f = y(t_f)$. Почетни положај $M_0(x_0, y_0)$, као и почетна брзина V_0 тачке познати су, док је вредност угла φ_0 у почетном тренутку и крајњи тренутак t_f непознат, при чему су

$$-\pi \leq \varphi_0 \leq \pi, \quad t_f \geq 0.\tag{2.15}$$

Брахистохрони проблем кретања тачке, описан диференцијалним једначинама (2.12), састоји се у одређивању екстремалних управљања, као и њима одговарајућих променљивих стања $x = x(t), y = y(t), V = V(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$, тако да тачка из почетног стања на многострукости (2.13), пређе у крајње стање на многострукост (2.14), за минимално време. То се може изразити у виду услова да функционал

$$J(x, y, V, \varphi, u) = \int_0^{t_f} dt, \quad (2.16)$$

на интервалу $[0, t_f]$ има минималну вредност.

2.2 Решење проблема оптималног управљања за случај неограничене реакције везе

У циљу решења проблема оптималног управљања, формулисан Понтрјагиновим (руски: *Лев Семёнович Понтрягин*, енглески: *Lev Semyonovich Pontryagin, 1908-1988*) принципом максимума, формира се Понтрјагинова функција³¹ у следећем облику [Vuković, 1984; Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962]

$$H(x, y, V, \varphi, u, \lambda) = \lambda_0 - \lambda_x V \cos \varphi - \lambda_y V \sin \varphi + \lambda_V g \sin \varphi + \lambda_\varphi \left(g \cos \varphi + \frac{1}{m} u \right) \frac{1}{V}, \quad (2.17)$$

где је $\lambda = (\lambda_0, \lambda_x, \lambda_y, \lambda_V, \lambda_\varphi)^T$ спрегнути вектор и може се узети да је $\lambda_0 = -1$ ($\lambda_0 = \text{const.} \leq 0$) (видети [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962]), док су $\lambda_x(\cdot): [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}, \lambda_y(\cdot): [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}, \lambda_V(\cdot): [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ и $\lambda_\varphi(\cdot): [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$. За потребе даљих разматрања, дефинише се функција прекида H_1 у следећем облику

$$H_1 \triangleq \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{1}{mV} \lambda_\varphi. \quad (2.18)$$

Сада се, на основу (2.17) и (2.18), Понтрјагинова функција H може написати у следећем облику

³¹ У литератури се може срести и под називом Хамилтонијан.

$$H = H_0 + H_1 u, \quad (2.19)$$

где је

$$H_0 = -1 - \lambda_x V \cos \varphi - \lambda_y V \sin \varphi + \lambda_V g \sin \varphi + \lambda_\varphi \frac{1}{V} g \cos \varphi. \quad (2.20)$$

Овакав случај, када Понтрјагинова функција линеарно зависи од управљања, у теорији оптималних управљања је познат као сингуларан [Obradović, 1994; Bryson, 1975], где се потребан услов оптималности, који проистиче из Понтрјагиновог принципа максимума, може записати у следећем облику

$$H_1 = 0, \quad (2.21)$$

одакле се екстремална управљања експлицитно не могу одредити. Уколико дозвољена управљања припадају отвореном скупу, као што је то у овом делу, услов (2.21) представља једини услов за одређивање екстремалних управљања међу којима се налазе оптимална. За случај ограничене пројекције силе реакције везе, што је предмет анализе у наредном делу овог поглавља, а самим тим управљања припадају затвореном скупу, принцип максимума не може директно да се примени за решавање постављеног проблема оптимизације³². У том случају екстремална управљања састоје се из сингуларних и несингуларних (bang–bang) управљања, уз одговарајуће услове спрезања сингуларних и несингуларних делова екстремалних трајекторије. Принцип максимума мора бити задовољен на целом интервалу $[0, t_f]$, уз одговарајуће услове трансверзалности на крајевима $t_0 = 0$ и t_f , док у тачкама спрезања фазне координате и спрегнуте променљиве морају бити непрекидне. Имајући у виду граничне услове (2.13) и (2.14), као и чињеницу да време не фигурише експлицитно у једначинама стања (2.12), постављени проблем оптималног управљања може се решити директном применом Теореме 3 [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962], која подразумева примену Теореме 1 [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962]. Спрегнути систем диференцијалних једначина [Vuković, 1984;

³² Потребан услов оптималности (2.21) принципа максимума постаје неефективан за управљања која припадају затвореном скупу.

Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962], имајући у виду Понтрјагинову функцију (2.17), има следећи облик

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \dot{\lambda}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \\ \dot{\lambda}_V &= -\frac{\partial H}{\partial V} = \lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi + \lambda_\varphi \left(g \cos \varphi + \frac{1}{m} u \right) \frac{1}{V^2}, \\ \dot{\lambda}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\lambda_x V \sin \varphi + \lambda_y V \cos \varphi - \lambda_V g \cos \varphi + \lambda_\varphi g \sin \varphi \frac{1}{V},\end{aligned}\tag{2.22}$$

одакле следи да су $\lambda_x = \text{const.}$ и $\lambda_y = \text{const.}$. У циљу формирања услова трансверзалности у почетном тренутку, у складу са Теоремом 3 [*Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962*], неопходно је нагласити да вектор почетне варијације $(\Delta x(0), \Delta y(0), \Delta V(0), \Delta \varphi(0))$ лежи у тангентној равни хиперповрши на многострукости (2.13) [*Vuković, 1984*]. Имајући у виду ортогоналност спрегнутог вектора на тангентну раван хиперповрши на многострукости (2.13), могу се формирати услови трансверзалности у почетном тренутку

$$\lambda_x \Delta x(0) + \lambda_y \Delta y(0) + \lambda_V \Delta V(0) + \lambda_\varphi \Delta \varphi(0) = 0,\tag{2.23}$$

где $\Delta(\cdot)$ представља асинхрону варијацију [*Elsogolc, 1963; Gelfand, Fomin, 1964*] величине (\cdot) . Почетни услови (2.13), доводе до следећих варијација фазних координата у почетном тренутку

$$\Delta x(0) = 0, \quad \Delta y(0) = 0, \quad \Delta V(0) = 0.\tag{2.24}$$

Имајући у виду независност варијације $\Delta \varphi(0)$, као и (2.23) и (2.24), следећи гранични услов у почетном тренутку следи

$$\lambda_\varphi(0) = 0.\tag{2.25}$$

Услови трансверзалности у крајњем тренутку имају следећи облик

$$\lambda_x \Delta x(t_f) + \lambda_y \Delta y(t_f) + \lambda_V(t_f) \Delta V(t_f) + \lambda_\varphi(t_f) \Delta \varphi(t_f) = 0,\tag{2.26}$$

где је, у складу са (2.14)

$$\frac{\partial \Psi_f}{\partial x_f} \Delta x(t_f) + \frac{\partial \Psi_f}{\partial y_f} \Delta y(t_f) = 0. \quad (2.27)$$

Сада, имајући у виду независност варијација $\Delta x(t_f), \Delta V(t_f)$ и $\Delta \varphi(t_f)$, следећи гранични услови на основу (2.26) и (2.27) могу се формирати

$$\Psi_f^*(x_f, y_f, \lambda_x, \lambda_y) = \lambda_x - \frac{(\partial \Psi_f / \partial x_f)}{(\partial \Psi_f / \partial y_f)} \lambda_y = 0, \quad (2.28)$$

$$\lambda_V(t_f) = 0, \quad \lambda_\varphi(t_f) = 0. \quad (2.29)$$

Гранични услови (2.25), (2.28) и (2.29), добијени из услова трансверзалности (2.23) и (2.26), који одговарају почетном и крајњем тренутку респективно, такође задовољавају потребне услове оптималности (2.21). Када време t_f није унапред одређено, као што је то у овом случају, при решавању система једначина (2.12) и (2.22), у складу са граничним условима и условима трансверзалности (2.13), (2.14), (2.25), (2.28) и (2.29), треба придружити услов, што следи директном применом Теореме 1 [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962], да је вредност Понтрјагинове функције на оптималној трајекторији у сваком тренутку једнака нули

$$H(t) = 0, \quad (2.30)$$

који, узимајући у обзир граничне услове (2.29), доводи до следећег услова у крајњем тренутку t_f

$$-1 - \lambda_x V(t_f) \cos(t_f) - \lambda_y V(t_f) \sin(t_f) = 0. \quad (2.31)$$

Поступак одређивања екстремалних управљања састоји се у даљем диференцирању функције прекида H_1 по времену, у складу са једначинама (2.12) и (2.22), све док се експлицитно не појави управљање. У том циљу, применимо добро познат формализам Поасонових (*Siméon Denis Poisson, 1781-1840*) заграда [Gabasov, Kirillova, 1972] при израчунавању сингуларног управљања u

$$\dot{H}_1 = \{H_1, H_0\} = \{H_1, H_0\} + \{H_1, H_1\} u = 0. \quad (2.32)$$

На основу услова (2.21) и чињенице да дуж сингуларног дела екстремалане трајекторије следећа релација важи (видети [Gabasov, Kirillova, 1972])

$$\{H_1, H_1\} = 0, \quad (2.33)$$

добија се да је

$$\{H_1, H_0\} = -\frac{1}{mV}(\lambda_x V \sin \varphi - \lambda_y V \cos \varphi + g\lambda_V \cos \varphi) = 0. \quad (2.34)$$

На основу услова (2.21) и (2.34), у складу са (2.18) и (2.20), дуж сингуларног дела екстремалне трајекторије важи

$$\lambda_\varphi(t) \equiv 0, \quad \lambda_V(t) = \frac{V}{g}(\lambda_y - \lambda_x \tan \varphi). \quad (2.35)$$

Даљим диференцирањем по времену релације (2.32), добија се

$$\ddot{H}_1 = \{\{H_1, H_0\}, H_0\} + \{\{H_1, H_0\}, H_1\}u = 0. \quad (2.36)$$

Сада се, на основу (2.36), у складу са (2.35), може одредити сингуларно управљање првог реда у облику

$$u(\varphi) = -2mg \cos \varphi. \quad (2.37)$$

Обједињујући услове (2.19), (2.20), (2.21), (2.30) и (2.35), добија се

$$\lambda_x = -\frac{\cos \varphi}{V} = \text{const.}, \quad (2.38)$$

док се на основу (2.31) и (2.38) добија

$$\lambda_y = -\frac{\sin \varphi_f}{V_f}, \quad (2.39)$$

где су $\varphi(t_f) = \varphi_f$ и $V(t_f) = V_f$. Гранични услов (2.28), у складу са (2.38) и (2.29), сада добија следећи облик

$$\Psi_f^*(x_f, y_f, \varphi_f) = \cos \varphi_f - \frac{(\partial \Psi_f / \partial x_f)}{(\partial \Psi_f / \partial y_f)} \sin \varphi_f = 0, \quad (2.40)$$

док се λ_V , на основу (2.35), (2.38) и (2.39), може изразити у следећем облик

$$\lambda_V(t) = \frac{1}{g} \left(\sin \varphi - \frac{V}{V_f} \sin \varphi_f \right). \quad (2.41)$$

Неопходан Келијев (*Kelley*) услов³³ оптималности за сингуларно управљање првог реда [*Bryson, 1975; Kelley, Kopp, Moyer, 1967*], у складу са (2.35) и (2.38), сада се може записати применом Поасонових заграда [*Gabasov, Kirillova, 1972*] у облику

$$\{\{H_1, H_0\}, H_1\} = \frac{1}{(mV)^2} > 0. \quad (2.42)$$

Из релације (2.42), јасно се може закључити да је Келијев услов оптималности задовољен, односно $\{\{H_1, H_0\}, H_1\} > 0 \forall t \in [0, t_f]$. Једначине стања (2.12), у складу са (2.37), сада добијају следећи облик

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -V \cos \varphi, \\ \dot{y} &= -V \sin \varphi, \\ \dot{V} &= g \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{g \cos \varphi}{V}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Параметарске једначине трајекторије тачке M , добијене су интеграцијом прве две једначине стања (2.43), имајући у виду притом (2.38)

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 - \frac{1}{g} \left(\frac{V_0}{2 \cos \varphi_0} \right)^2 \left(\sin 2\varphi_0 + 2 \frac{g}{V_0} \cos \varphi_0 t - \sin 2 \left(\varphi_0 - \frac{g}{V_0} \cos \varphi_0 t \right) \right), \\ y(t) &= y_0 - \frac{1}{g} \left(\frac{V_0}{2 \cos \varphi_0} \right)^2 \left(\cos 2 \left(\varphi_0 - \frac{g}{V_0} \cos \varphi_0 t \right) - \cos 2\varphi_0 \right), \end{aligned} \quad (2.44)$$

док је закон промене угла φ у функцији од времена одређен следећом релацијом

$$\varphi(t) = \varphi_0 - \frac{g}{V_0} \cos \varphi_0 t, \quad (2.45)$$

где је $t \in [0, t_f]$. Закон промене брзине V тачке M из (2.38), такође је одређен

$$V(t) = \frac{V_0}{\cos \varphi_0} \cos \left(\varphi_0 - \frac{g}{V_0} \cos \varphi_0 t \right). \quad (2.46)$$

³³ У литератури се може срести и под називом уопштени Лежандро–Клебшов (*Adrien-Marie Legendre, 1752-1833; Rudolf Friedrich Alfred Clebsch, 1833-1872*) услов.

Сада је непознате граничне вредности φ_0 и t_f могуће одредити из следећих граничних услова

$$\begin{aligned}\Psi_f(x_f, y_f) &= 0, \\ \Psi_f^*(x_f, y_f, \varphi_f) &= \cos \varphi_f - \frac{(\partial \Psi_f / \partial x_f)}{(\partial \Psi_f / \partial y_f)} \sin \varphi_f = 0,\end{aligned}\tag{2.47}$$

имајући у виду притом (2.44) и (2.45). Након одређених непознатих граничних вредности φ_0 и t_f из система (2.47), кога чине две, у општем случају нелинеарне једначине, могуће је одредити $x(t), y(t), V(t), \varphi(t), \lambda_x, \lambda_y$ и $\lambda_V(t)$, док је $\lambda_\varphi(t) \equiv 0$. Иако је непознате граничне вредности ТРВРП могуће одредити на претходно описан начин, у овом поглављу, решења ТРВРП, одређеног једначинама стања (2.43), као и одговарајућим граничним условима (2.13) и (2.47), биће одређена применом методе гађања [Stoer, Bulirsch, 1993]. Двопараметарски шутинг састоји се у одређивању почетне вредности угла φ_0 , као и минимално потребног времена t_f . Нумерички поступак састоји се у „гађању” крајњих граничних услова (2.47), у складу са (2.43), при познатом почетном положају и почетној брзини тачке (2.13). На основу датих процена (2.15), може се тврдити да се сва решења одговарајућег ТРВРП сигурно налазе унутар датих интервала вредности, а самим тим и глобални минимум времена при брахистохроном кретању тачке M . За случај вишеструких решења принципа максимума, глобални минимум је оно решење које одговара минималном времену. С обзиром да је крајњи циљ одредити оно решење ТРВРП које одговара минималном времену, одредићемо решења ТРВРП у интервалу крајњег тренутка $0 \leq t_f \leq t_f^*$, где је t_f^* дата позитивна константа. У том циљу, успоставимо следеће функционалне релације у нумеричком облику

$$\Gamma(z) = \left[\Psi_f(x_f, y_f), \Psi_f^*(x_f, y_f, \varphi_f) \right]^T = \mathbf{0}_{2 \times 1},\tag{2.48}$$

где су $\Gamma(z) \equiv [\Gamma_1(z), \Gamma_2(z)]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ шутинг функција [Jiang, Baoyin, Li, 2012] и $z = [t_f, \varphi_0]$. Решења TPBVP могу бити геометријски представљена у простору \mathbb{R}^2 са осама t_f и φ_0 , имајући у виду (2.15), посредством уграђене **ContourPlot()** *Mathematica* функције (видети [Ruskeepää, 2009]). Наиме, решења TPBVP у простору (t_f, φ_0) могуће је геометријски представити пресеком одговарајућих кривих (2.48) као

$$\Gamma_1(t_f, \varphi_0) \cap \Gamma_2(t_f, \varphi_0) = \{M_1, \dots, M_r\}. \quad (2.49)$$

Број елемената скупа (2.49) једнак је броју решења TPBVP, док координате пресечних тачака у простору (t_f, φ_0) представљају решења TPBVP. На основу пресека кривих (2.49), могуће је извршити процену координата свих пресечних тачака (2.49). Процењене координате пресечних тачака, могу се користити као почетна итерација³⁴ за одређивање тачних вредности непознатих t_f и φ_0 применом методе шутинга.

Решења TPBVP одредићемо за следеће вредности параметара

$$m = 1\text{kg}, \quad x_0 = \pi\text{m}, \quad y_0 = 2\text{m}, \quad E_0 = 30 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}, \quad t_f^* = 2\text{s}, \quad (2.50)$$

док је $g = 9,80665\text{m/s}^2$. Почетни услови (2.13), за дате вредности параметара (2.50), узимају следеће вредности

$$t_0 = 0, \quad x(t_0) = \pi\text{m}, \quad y(t_0) = 2\text{m} \leq \frac{E_0}{mg}, \quad V(t_0) = \pm 4,557784 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (2.51)$$

док су гранични услови (2.47) одређени као

³⁴ Под почетном итерацијом подразумевамо одређен скуп вредности које задајемо у оквиру уграђене **FindRoot[]** *Mathematica* функције приликом одређивања непознатих граничних услова.

$$\begin{aligned}
t = t_f, \quad \Gamma_1(t_f, \varphi_0) = \Psi_f = y_f - a \cos\left(\frac{x_f}{a}\right) = 0, \\
\Gamma_2(t_f, \varphi_0) = \Psi_f^* = \cos \varphi_f - \sin \varphi_f \sin\left(\frac{x_f}{a}\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{2.52}$$

где је $a = 1\text{m}$. На слици 2.2а приказане су криве Ψ_f и Ψ_f^* , добијене посредством уграђене `ContourPlot()` *Mathematica* функције као

```
ContourPlot[{Ψf*[tf, φ0] == 0, Ψf[tf, φ0] == 0}, {tf, 0, 2}, {φ0, -π, π},
FrameLabel -> {StandardForm[tf[s]], StandardForm[φ0]},
LabelStyle -> Directive[14], BoxRatios -> {1, 1}]
```

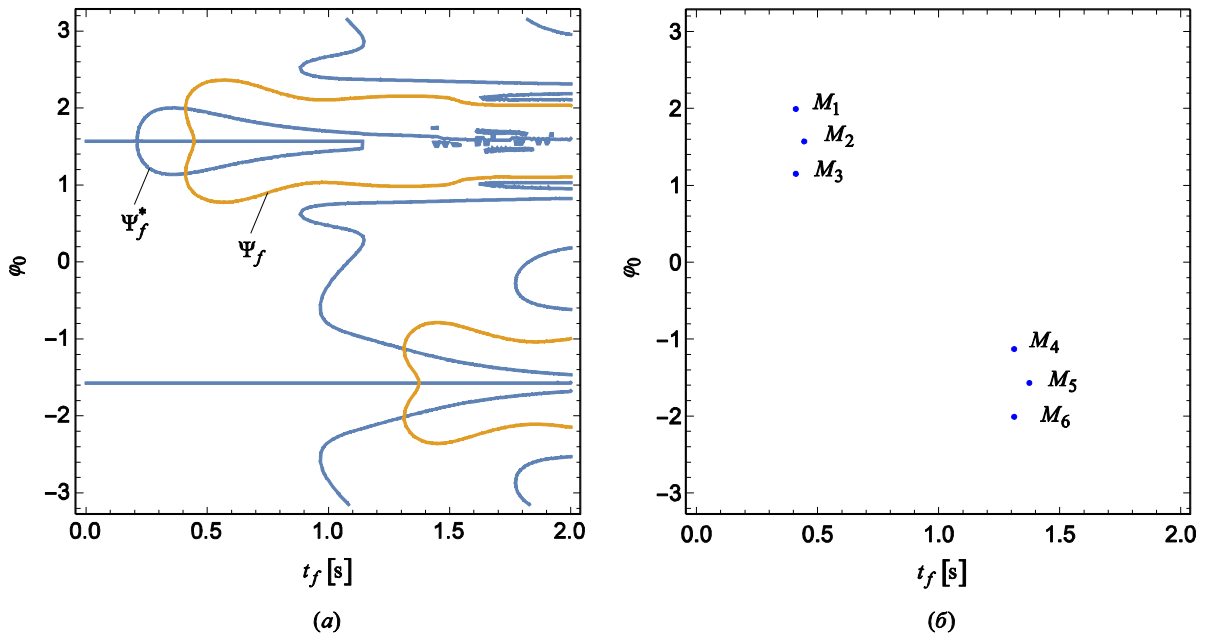
док су на слици 2.2б приказане тачке пресека кривих Ψ_f и Ψ_f^* добијене као

```
ContourPlot[{Ψf*[tf, φ0] == 0, Ψf[tf, φ0] == 0}, {tf, 0, 2}, {φ0, -π, π},
FrameLabel -> {StandardForm[tf[s]], StandardForm[φ0]},
LabelStyle -> Directive[14], MeshFunctions -> {Function[{tf, φ0}, Ψf[tf, φ0] ]},
MeshStyle -> {{PointSize[0.01], Blue}}, Mesh -> {{0}}, ContourStyle -> None,
BoxRatios -> {1, 1}]
```

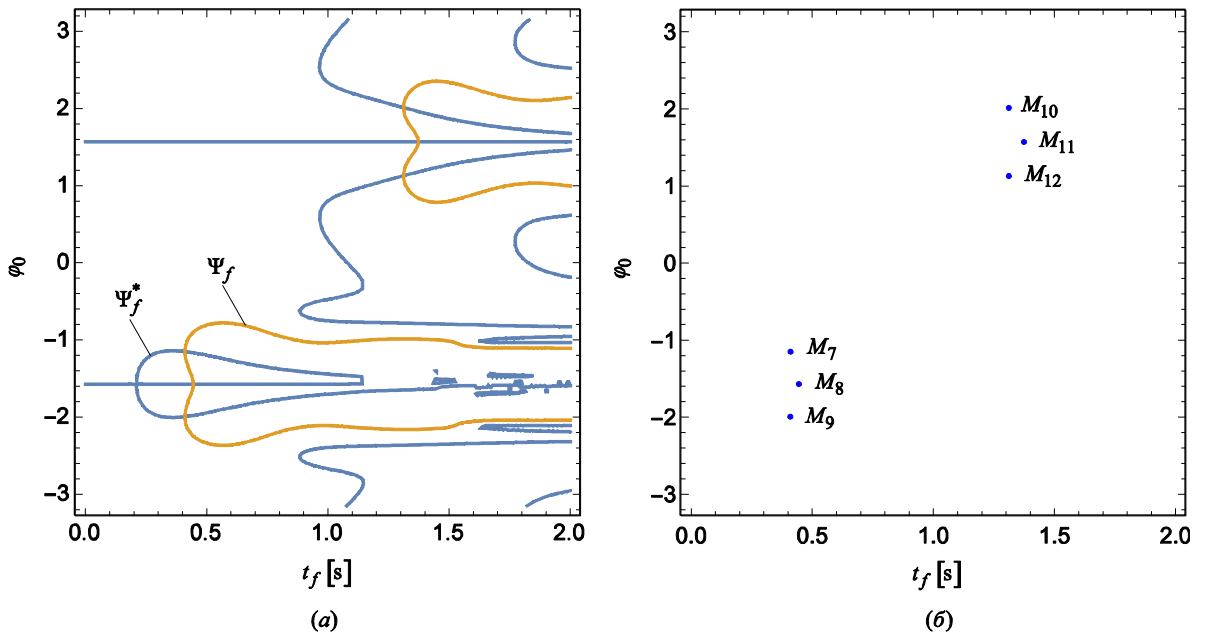
при вредности почетне брзине $V_0 = 4,557784 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. На слици 2.3а приказане су криве

Ψ_f и Ψ_f^* , док су на слици 2.3б приказане тачке пресека кривих Ψ_f и Ψ_f^* , при

вредности почетне брзине $V_0 = -4,557784 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



Слика 2.2 Решења ТРВВР при $V_0 = 4,557784 \frac{\text{m}}{\text{s}}$: (а) пресек кривих $\Gamma_1(t_f, \varphi_0)$ и $\Gamma_2(t_f, \varphi_0)$, (б) пресечне тачке $M_i, i = \overline{1,6}$.



Слика 2.3 Решења ТРВВР при $V_0 = -4,557784 \frac{\text{m}}{\text{s}}$: (а) пресек кривих $\Gamma_1(t_f, \varphi_0)$ и $\Gamma_2(t_f, \varphi_0)$, (б) пресечне тачке $M_i, i = \overline{7,12}$.

Са слика 2.2 и 2.3 јасно се може закључити да решење ТРВVP није јединствено. У наредним табелама приказана су решења ТРВVP.

Табела 2.1 Нумеричка решења ТРВVP при $V_0 = 4,557784 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

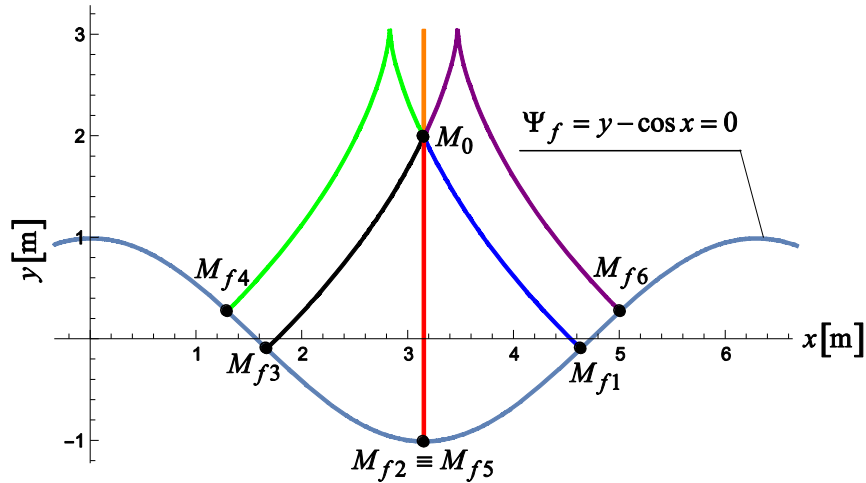
Решења	t_f [s]	φ_0
Прво решење (M_1)	0,410241	1,992805
Друго решење (M_2)	0,445090	1,570796
Треће решење (M_3)	0,410241	1,148787
Четврто решење (M_4)	1,311516	-1,129025
Пето решење (M_5)	1,374620	-1,570796
Шесто решење (M_6)	1,311516	-2,012569

Табела 2.2 Нумеричка решења ТРВVP при $V_0 = -4,557784 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Решења	t_f [s]	φ_0
Седмо решење (M_7)	0,410241	-1,148787
Осмо решење (M_8)	0,445090	-1,570796
Девето решење (M_9)	0,410241	-1,992805
Десето решење (M_{10})	1,311516	2,012569
Једанаесто решење (M_{11})	1,374620	1,570796
Дванаесто решење (M_{12})	1,311516	1,129025

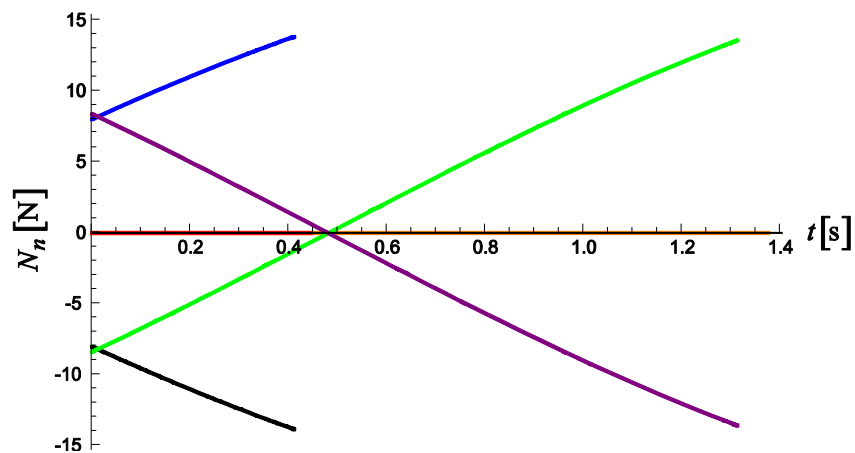
На основу решења ТРВVP приказаних у табелама 2.1 и 2.2, може се закључити да решењима M_i ($i = \overline{1,6}$) одговарају физички иста решења M_{i+6} респективно, па ће у наставку бити разматрана само решења приказана у табели 2.1. На основу одређених решења ТРВVP може се закључити да глобални минимум времена при брахистохроном кретању тачке у вертикалној равни одговара првом и трећем решењу

(тачке M_1 и M_3 приказане на слици 2.2) и износи $t_f = 0,410241s$. На слици 2.4 приказани су закони промене $y = y(x)$ (екстремалне трајекторије тачке M), док су на слици 2.5 приказани закони промене пројекције силе нормалне реакције у функцији од времена.



Слика 2.4 Трајекторије $y_i = y_i(x_i)$ тачке M које одговарају респективно решењима $M_i (i = \overline{1,6})$

На сликама 2.4 и 2.5, као и сликама које следе у наставку, истој боји одговара исто решење.



Слика 2.5 Пројекције $N_n = N_n(t)$ силе нормалне реакције

2.3 Решење проблема оптималног управљања за случај ограничене реакције везе

У овом делу разматра се брахистохроно кретање материјалне тачке M за случај ограничене пројекције силе реакције везе до фиксних граница, па у складу са (2.6) пишемо

$$N^* \leq u \leq N^{**}, \quad (2.53)$$

где су $N^* = -12N$ и $N^{**} = 12N$. На основу графичког приказа функција екстремалних управљања на слици 2.5, не умањујући општост разматрања, може се закључити да првом и четвртом решењу одговара $\text{sing} - \text{max}$ структура управљања

$$u = \begin{cases} u_{\text{sing}}, & 0 \leq t < t_1 \\ u_{\text{max}}, & t_1 \leq t \leq t_f \end{cases}, \quad (2.54)$$

где је сингуларно управљање, на основу (2.37), одређено као $u_{\text{sing}} = -2mg \cos \varphi$ и $u_{\text{max}} = 12N$, док трећем и шестом решењу одговара $\text{sing} - \text{min}$ структура управљања

$$u = \begin{cases} u_{\text{sing}}, & 0 \leq t < t_1 \\ u_{\text{min}}, & t_1 \leq t \leq t_f \end{cases}, \quad (2.55)$$

где је $u_{\text{min}} = -12N$, док је t_1 тренутак прекида функције екстремалног управљања³⁵. Имајући у виду структуре управљања (2.54) и (2.55), можемо закључити да функције екстремалних управљања које одговарају првом и четвртом, односно трећем и шестом решењу, имају прекид прве врсте у тренутку t_1 . Одговарајући услови за спрезање између сингуларног и несингуларног дела екстремалног управљања, који представљају неопходне услове за оптимално спрезање, морају бити задовољени, што је одређено Теоремом 1 из [McDanell, Powers, 1971; Odia, Bell, 2012]. Наиме, нека је $2q$ најнижи ред извода по времену функције прекида H_1 , која садржи експлицитно управљање u , и $u^{(r)}$ ($r \geq 0$) најнижи ред извода управљања u које има

³⁵ Сваком решењу, разуме се, одговара одређена вредност тренутка t_1 прекида.

прекид у тренутку t_1 . У складу са Теоремом 1 [McDanell, Powers, 1971; Odia, Bell, 2012], неопходан услов за спрезање између сингуларног и несингуларног дела екстремалног управљања изражава се условом да је збир $q+r$ непаран цео број. У разматраном случају, имамо да је $q=1$ и $r=0$, односно $q+r=1$; на основу Теореме 1 [McDanell, Powers, 1971; Odia, Bell, 2012] можемо закључити да је неопходан услов за оптимално спрезање испуњен. На интервалу $[0, t_1)$, који одговара сингуларном делу управљања u_{sing} , важе једначине стања дате у (2.43). На интервалу $[t_1, t_f]$, који одговара несингуларном делу управљања u_{max} , важе једначине стања које сада имају следећи облик

$$\dot{x} = -V \cos \varphi, \quad \dot{y} = -V \sin \varphi, \quad \dot{V} = g \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{mg \cos \varphi + u_{\text{max}}}{mV}. \quad (2.56)$$

Из граничног услова (2.31), могуће је координату λ_y спрегнутог вектора изразити у облику

$$\lambda_y = -\frac{1}{V_f \sin \varphi_f} (1 + \lambda_x V_f \cos \varphi_f). \quad (2.57)$$

У складу са (2.17) и (2.58), спрегнути систем диференцијалних једначина, који одговара несингуларном делу управљања u_{max} , има следећи облик

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \dot{\lambda}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \\ \dot{\lambda}_V &= -\frac{\partial H}{\partial V} = -\left(\lambda_x \sin(\varphi - \varphi_f) + \frac{\sin \varphi}{V_f} \right) \frac{1}{\sin \varphi_f} + \lambda_\varphi (u_{\text{max}} + mg \cos \varphi) \frac{1}{mV^2}, \\ \dot{\lambda}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -g \cos \varphi \lambda_V + \lambda_\varphi \frac{g \sin \varphi}{V} - \frac{1}{\sin \varphi_f} \frac{V}{V_f} (\lambda_x V_f \cos(\varphi - \varphi_f) + \cos \varphi). \end{aligned} \quad (2.58)$$

У основном (2.56) и спрегнутом (2.58) систему, фигурисаће u_{min} , уместо u_{max} , за случај структуре управљања дате у (2.55), која одговара трећем и шестом решењу. Као и у претходном случају, нумерички поступак применом кога ћемо одредити непознате граничне вредности одговарајућег TPBVP заснован је на методи шутинга. Петопараметарски шутинг састоји се у одређивању непознате координате λ_x

спрегнутог вектора, тренутака t_1 прекида функције управљања, крајњег тренутка t_f , као и координате x_f тачке M и угла φ_f у крајњем тренутку t_f . Нумерички поступак за решавање Кошијевог (*Augustin Louis Cauchy, 1789-1857*) проблема, можемо представити у неколико следећих корака:

– У првом кораку, погодно је извршити нумеричку интеграцију диференцијалних једначина (2.56) и (2.58) уназад на интервалу $[t_f, t_1]$, који одговара несингуларном делу управљања u_{\max} , са почетним условима

$$\begin{aligned} x(t_f) &= x_f, & y(t_f) &= y_f, & V(t_f) &= \pm \sqrt{2 \left(\frac{E_0}{m} - g \cos x_f \right)}, \\ \varphi(t_f) &= \varphi_f, & \lambda_V(t_f) &= 0, & \lambda_\varphi(t_f) &= 0, \end{aligned} \quad (2.59)$$

где је у разматраном задатку $y_f = a \cos(x_f / a)$. Коришћењем функције прекида (2.18), као и извода по времену функције прекида (2.34), могу се формирати следеће функционалне зависности у нумеричком облику $H_1(t_1) = \Gamma_1(t_f, t_1, x_f, \varphi_f, \lambda_x)$ и $\{H_1, H_0\}(t_1) = \Gamma_2(t_f, t_1, x_f, \varphi_f, \lambda_x)$ одређене у тренутку t_1 , имајући у виду притом релацију (2.57). На основу граничног услова (2.28), може се формирати следећа функционална зависност у нумеричком облику $\Psi_f^*(t_f) = \Gamma_3(t_f, t_1, x_f, \varphi_f, \lambda_x)$ одређена у крајњем тренутку t_f , имајући у виду такође релацију (2.57).

– У другом кораку, погодно је такође извршити нумеричку интеграцију једначина стања (2.43) уназад на интервалу $[t_1, 0]$, који одговара сингуларном делу управљања u_{sing} , са почетним условима $x(t_1), y(t_1), V(t_1)$ и $\varphi(t_1)$, који се добијају као решења нумеричке интеграције извршене у претходном кораку. На основу одређеног почетног положаја (x_0, y_0) тачке M , могу се формирати следеће функционалне зависности у нумеричком облику $x(0) - x_0 = \Gamma_4(t_f, t_1, x_f, \varphi_f, \lambda_x)$ и $y(0) - y_0 = \Gamma_5(t_f, t_1, x_f, \varphi_f, \lambda_x)$ одређене у почетном тренутку $t_0 = 0$.

На основу претходно реченог, сада се може формирати шутинг функција

$$\Gamma(z) = [\Gamma_1(z), \Gamma_2(z), \Gamma_3(z), \Gamma_4(z), \Gamma_5(z)]^T = \mathbf{0}_{5 \times 1}, \quad (2.60)$$

где су $\Gamma(z) \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$ и $z = [t_f, t_1, x_f, \varphi_f, \lambda_x]$. Процена интервала вредности непознате координате λ_x спрегнутог вектора може се, у општем случају, одредити на основу релације (2.38), која важи на интервалу који одговара сингуларном делу управљања u_{sing} , у облику

$$-\frac{1}{V^*} \leq \lambda_x \leq \frac{1}{V^*}, \quad (2.61)$$

где се за V^* , по могућности, може узети минимална вредност скупа бројева одређених максималним вредностима брзине тачке M за свако од решења ТРВРР на интервалу који одговара сингуларном делу управљања. Како унапред нису познати закони промене брзина тачке M за свако од решења ТРВРР за случај ограничене реакције везе, за V^* може се узети позната вредност брзине тачке M са почетка, или краја интервала који одговара сингуларном делу управљања. У разматраном задатку, имајући у виду структуре (2.54) и (2.55), за V^* узета је почетна вредност брзине тачке M , тј. $V^* = V_0$. Процена интервала вредности координате λ_x спрегнутог вектора, према (2.61), је

$$-0,2194 \leq \lambda_x \leq 0,2194, \quad (2.62)$$

док су $0 \leq t_f \leq 2, 0 \leq t_1 \leq 2$ и $-\pi \leq \varphi_f \leq \pi$. Процена интервала вредности координате x_f тачке M у крајњем тренутку може се одредити као

$$x_f^* \leq x_f \leq x_f^{**}, \quad (2.63)$$

где су x_f^* и x_f^{**} дате константе. На основу графичког приказа функције $x(t)$ на слици 2.4, за интервал вредности координате x_f тачке M у крајњем тренутку може се узети $0,8 \leq x_f \leq 5,5$, како бисмо били на страни сигурности. На основу датих процена интервала вредности свих непознатих граничних вредности, може се, такође,

тврдити да се решења одговарајућег TPBVP сигурно налазе унутар датих интервала, а самим тим и глобални минимум времена при брахистохроном кретању тачке M са ограниченом реакцијом везе. Нумерички алгоритам GMTTPBVP1(), коришћен у овом поглављу, који је у целости приказан у Прилогу А, формиран је у програмском окружењу *MatLab*. Поступак рада програма GMTTPBVP1(), који у основи представља Монте Карло (*Monte Carlo*) метод уз одређене модификације у циљу брже и поузданије конвергенције, може се описати у неколико следећих корака:

- за унапред задати број случајних тачака (у конкретном примеру $nStart = 10000$), програм генерише случајну тачку у простору $(t_f, t_1, x_f, \varphi_f, \lambda_x)$ непознатих граничних вредности, посредством уграђене `rand()` функције која генерише униформну дистрибуцију псеудослучајних бројева из унапред одређених интервала непознатих граничних вредности;

- програм најпре одређује вредност шутинг функције у случајној тачки, па уколико је добијена вредност шутинг функције мања у односу на унапред одређен праг вредности (у конкретном примеру праг је 0,5), програм применом уграђене `fminsearch()` функције, која користи Нилдер–Мид (*Nelder–Mead*) симплекс метод за локалну минимизацију, одређује непознате граничне вредности t_f, t_1, x_f, φ_f и λ_x при којима је шутинг функција минимална. Са смањењем прага вредности, вероватноћа да се генерисана случајна тачка налази у околини једног од решења разматраног TPBVP је већа, па самим тим и брзина конвергенције је већа, али је неопходно у том случају генерисати већи број случајних тачака;

- уколико је минимална вредност шутинг функције мања, у односу на унапред одређену вредност (у конкретном примеру 10^{-12}), програм дато решења прихвата као једно од решења TPBVP, које се памти у матрицу `RezT`.

Решења разматраног TPBVP за $u_{max} = 12N$ и $u_{min} = -12N$, као резултат рада програма GMTTPBVP1(), приказана су у табели 2.3 и табели 2.4 респективно.

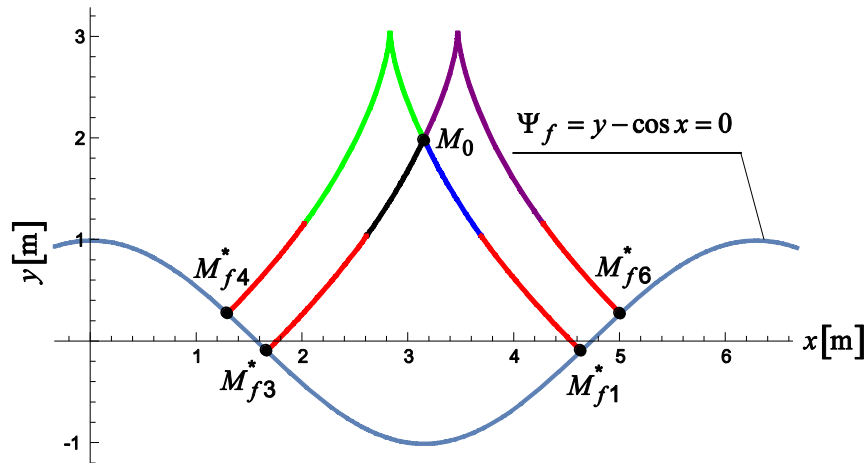
Табела 2.3 Нумеричка решења TPBVP за $u_{\max} = 12\text{N}$

Решења	t_f [s]	t_1 [s]	x_f [m]	φ_f	λ_x [s/m]
Прво решење (M_1^*)	0,410243	0,202347	4,625931	2,341222	0,089864
Четврто решење (M_4^*)	1,311517	1,141682	1,285253	-2,325870	-0,093809

Табела 2.4 Нумеричка решења TPBVP за $u_{\min} = -12\text{N}$

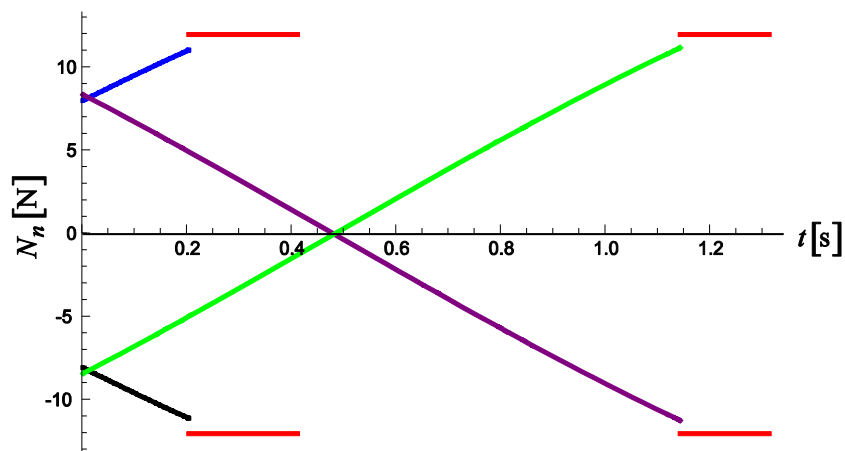
Решења	t_f [s]	t_1 [s]	x_f [m]	φ_f	λ_x [s/m]
Треће решење (M_3^*)	0,410243	0,202347	1,657254	0,800371	-0,089864
Шесто решење (M_6^*)	1,311517	1,141682	4,997932	-0,815723	0,093809

На слици 2.6 приказани су закони промене $y = y(x)$ при одређеним граничним вредностима приказаних у табели 2.3 и табели 2.4. На основу одређених граничних вредности, може се закључити да глобални минимум времена при брахистохроном кретању тачке, за случај ограничене реакције везе, одговара првом и трећем решењу (тачке M_1^* и M_3^* приказане на слици 2.6) и износи $t_f = 0,410243\text{s}$.



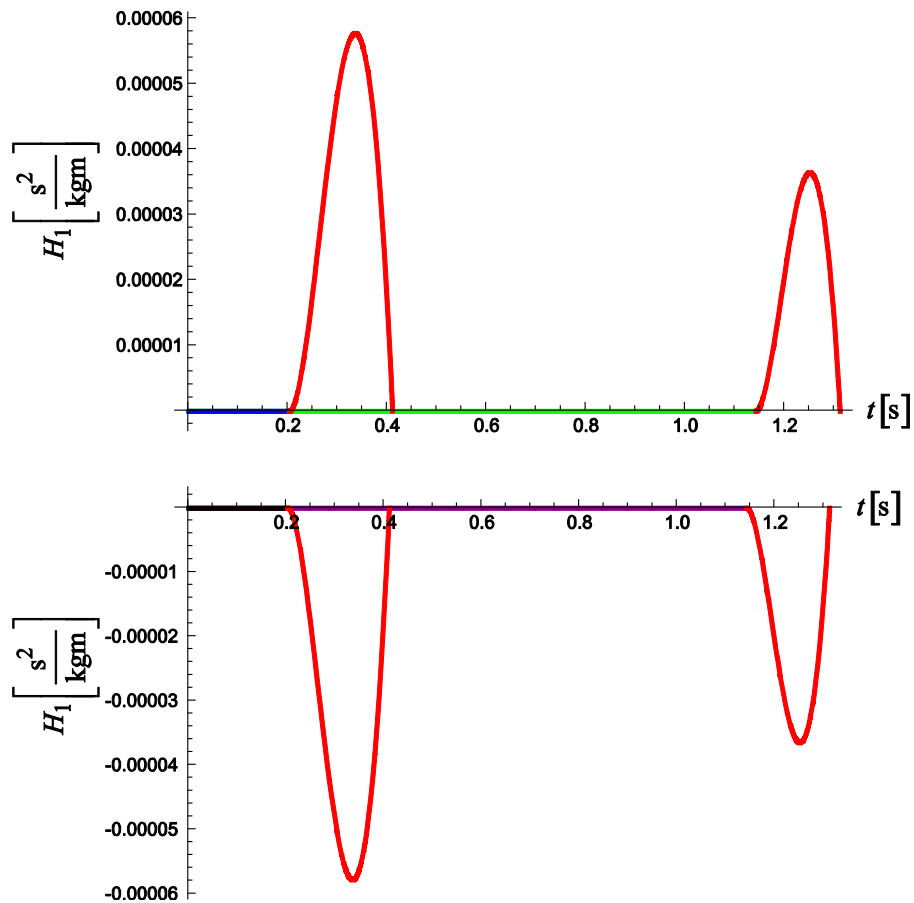
Слика 2.6 Трајекторије тачке M за случај ограничене реакције везе

На слици 2.7 приказани су закони промене пројекције силе нормалне реакције, за случај ограничене реакције везе, у функцији од времена.



Слика 2.7 Пројекције $N_n = N_n(t)$ за случај ограничене реакције везе

Будући да функције управљања $u(t) = N_n(t)$ имају прекид у тачкама спрезања сегмената (видети слику 2.7), може се закључити да су услови за спрезање између сингуларних и несингуларних делова управљања на екстремалној трајекторији задовољени. На слици 2.8, где су графички приказане функције прекида H_1 , евидентно је да је $H_1(\tau) > 0 \forall \tau \in [t_1, t_f]$ за свако од решења TPBVP.



Слика 2.8 Функције прекида H_1 за случај ограничене реакције везе

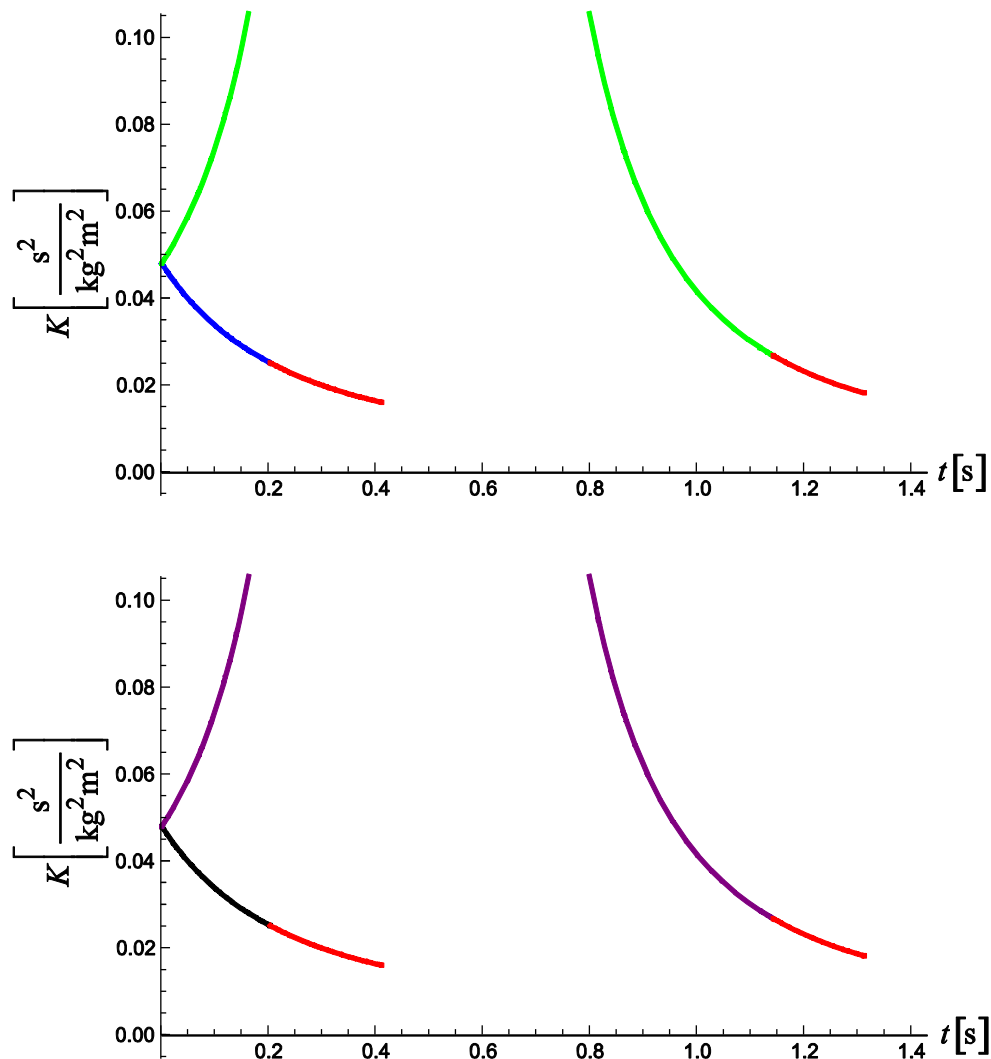
Неопходан Келијев услов оптималности [Gabasov, Kirillova, 1973], за сингуларно управљања првог реда, гласи

$$-\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\partial H}{\partial u} \right] \right) \leq 0, \quad (2.64)$$

који се може приказати у следећем облику

$$K \equiv \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\partial H}{\partial u} \right] \right) = -\frac{g \cos \varphi \lambda_\varphi}{m^2 V^3} + \frac{1}{m^2 V^2} \left(g \lambda_V \sin \varphi - \lambda_x V \frac{\sin(\varphi_f - \varphi)}{\sin \varphi_f} + \frac{V}{V_f} \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_f} \right) \geq 0. \quad (2.65)$$

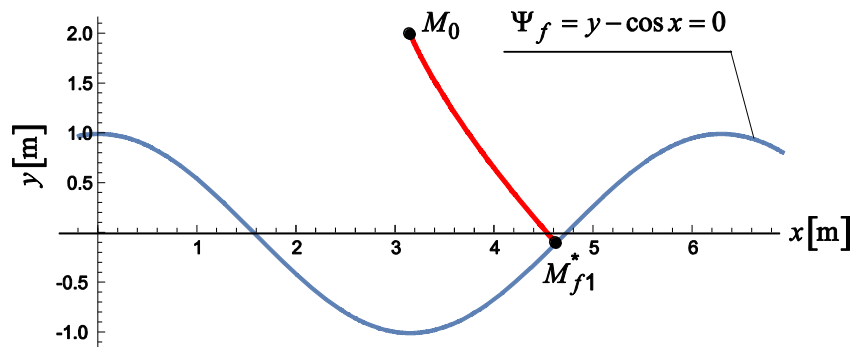
На слици 2.9 приказани су закони промене функције K из (2.65), одакле се јасно може закључити да је услов (2.64) испуњен за свако од решења TPBVP.



Слика 2.9 Функције K за случај ограничене реакције везе

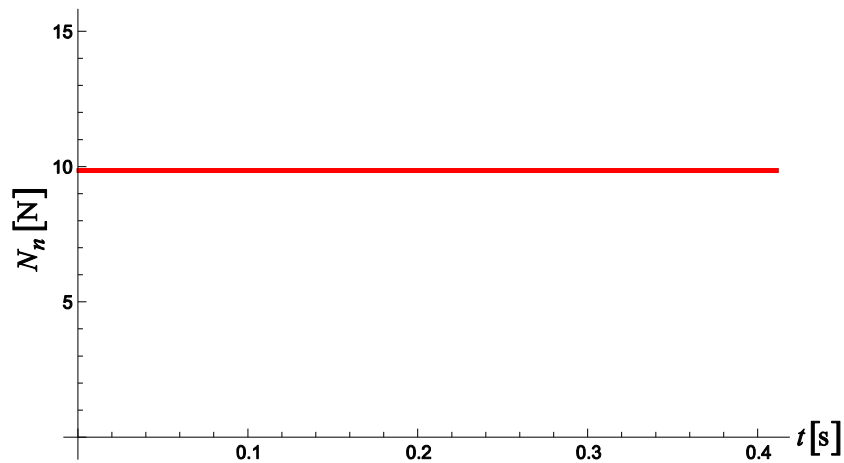
Како је смањење граничне вредности u_{\max} реакције везе праћено смањењем интервала који одговара сингуларном делу оптималног управљања, тј. смањењу тренутка t_1 који одговара прекиду функције управљања у првом и трећем решењу, природно се намеће следеће питање: колика је минимална гранична вредност u_{\max}^* реакције везе при којој интервал који одговара сингуларном делу управљања је једнак нули? Минимална гранична вредност u_{\max}^* реакције везе у првом решењу може се одредити користећи претходно дефинисане функционалне зависности у

нумеричком облику $\Gamma_1(z), \dots, \Gamma_5(z)$, где су сада $z = [t_f, u_{\max}^*, x_f, \varphi_f, \lambda_x]$ и $t_1 = 0$. За овако формулисан TPBVP, добијају се следеће граничне вредности: $t_f = 0,410356\text{s}$, $u_{\max}^* = 9,897793\text{N}$, $x_f = 4,615178\text{m}$, $\varphi_f = 2,293976$ и $\lambda_x = 0,089864\text{s/m}$. На слици 2.10 приказан је закон промене $y = y(x)$, док је на слици 2.11 приказан закон промене пројекције силе нормалне реакције ($u_{\max}^* = 9,897793\text{N} = \text{const.}$), при претходно одређеним граничним вредностима. На слици 2.12 приказан је закон промене функција прекида H_1 , док је на слици 2.13 приказан закон промене функције K .

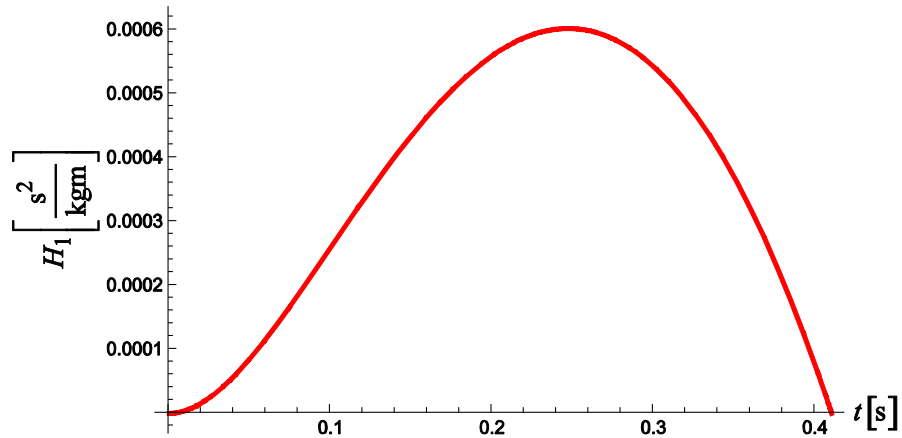


Слика 2.10 Трајекторија тачке M за случај минималне граничне вредности

$$u_{\max}^* = 9,897793\text{ N}$$

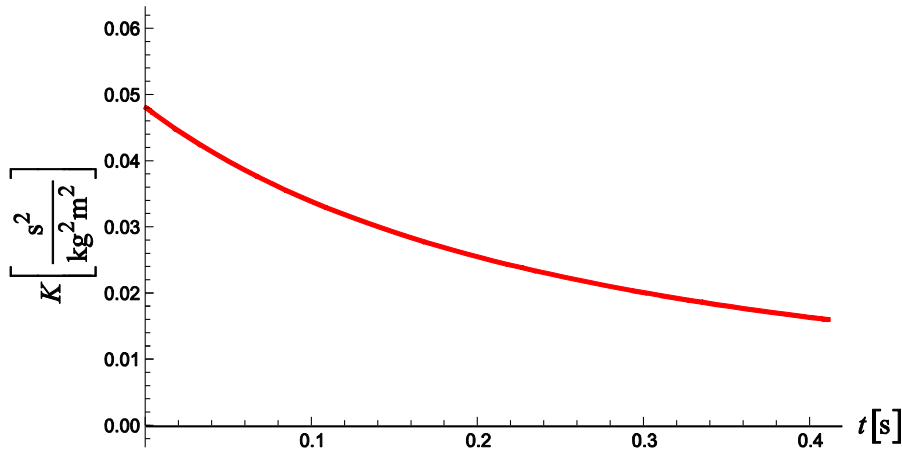


Слика 2.11 Минимална гранична вредност $N_n^* = 9,897793\text{ N}$ силе реакције везе



Слика 2.12 Функција прекида H_1 за случај минималне граничне вредности

$$u_{\max}^* = 9,897793 \text{ N}$$



Слика 2.13 Функција K за случај минималне граничне вредности $u_{\max}^* = 9,897793 \text{ N}$

За случај несиметричног ограничења реакције везе у четвртом решењу

$$N^* \leq u \leq N^{**}, \quad (2.66)$$

где су сада $N^* = -5\text{N}$ и $N^{**} = 12\text{N}$, структура управљања сада има следећи облик

$$u = \begin{cases} u_{\min}, & 0 \leq t \leq t_2 \\ u_{\text{sing}}, & t_2 < t < t_1 \\ u_{\max}, & t_1 \leq t \leq t_f \end{cases}, \quad (2.67)$$

где су $u_{\min} = -5\text{N}$ и $u_{\max} = 12\text{N}$. У овом случају, екстремална трајекторија се састоји из три сегмента. Екстремална трајекторија најпре започиње са сегментом дуж кога је

$N_n = -5N$, затим дуж сингуларног сегмента, и на крају се завршава са сегментом дуж кога је $N_n = 12N$. Нумерички поступак за решавање Кошијевог проблема сада се може представити у неколико следећих корака:

– У првом кораку погодно је извршити нумеричку интеграцију диференцијалних једначина (2.56) и (2.58) уназад на интервалу $[t_f, t_1]$, који одговара несингуларном делу управљања u_{\max} , са почетним условима (2.59). Коришћењем функције прекида (2.18), као и извода по времену функције прекида (2.34), могу се формирати следеће функционалне зависности у нумеричком облику $H_1(t_1) = \Gamma_1(t_f, t_1, t_2, x_f, \varphi_f, \lambda_x)$ и $\{H_1, H_0\}(t_1) = \Gamma_2(t_f, t_1, t_2, x_f, \varphi_f, \lambda_x)$, имајући у виду притом релацију (2.57). Коришћењем граничног услова (2.28), може се формирати следећа функционална зависност у нумеричком облику $\Psi_f^*(t_f) = \Gamma_3(t_f, t_1, t_2, x_f, \varphi_f, \lambda_x)$.

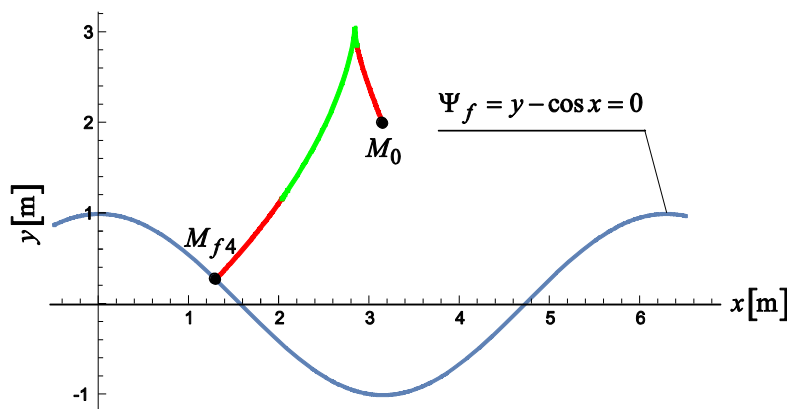
– У другом кораку погодно је такође извршити нумеричку интеграцију диференцијалних једначина које одговарају сингуларном делу управљања уназад на интервалу $[t_1, t_2]$, са почетним условима $x(t_1), y(t_1), V(t_1), \varphi(t_1), \lambda_V(t_1)$ и $\lambda_\varphi(t_1)$, који се добијају као решења нумеричке интеграције извршене у првом кораку.

– У трећем кораку погодно је такође извршити нумеричку интеграцију диференцијалних једначина (2.56) и (2.58) уназад на интервалу $[t_2, 0]$, који одговара несингуларном делу управљања u_{\min} , са почетним условима $x(t_2), y(t_2), V(t_2), \varphi(t_2), \lambda_V(t_2)$ и $\lambda_\varphi(t_2)$ који се добијају као решења нумеричке интеграције извршене у другом кораку. На основу одређеног почетног положаја (x_0, y_0) тачке M , као и граничног услова (2.25), могу се формирати следеће функционалне зависности у нумеричком облику $x(0) - x_0 = \Gamma_4(t_f, t_1, t_2, x_f, \varphi_f, \lambda_x)$, $y(0) - y_0 = \Gamma_5(t_f, t_1, t_2, x_f, \varphi_f, \lambda_x)$ и $\lambda_\varphi(0) = \Gamma_6(t_f, t_1, t_2, x_f, \varphi_f, \lambda_x)$.

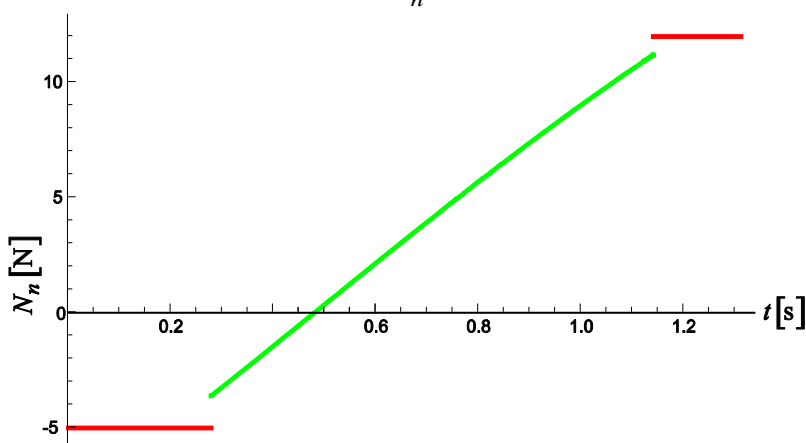
На основу претходно реченог, може се сада формирати шутинг функција

$$\Gamma(z) = [\Gamma_1(z), \Gamma_2(z), \Gamma_3(z), \Gamma_4(z), \Gamma_5(z), \Gamma_6(z)]^T = \mathbf{0}_{6 \times 1}, \quad (2.68)$$

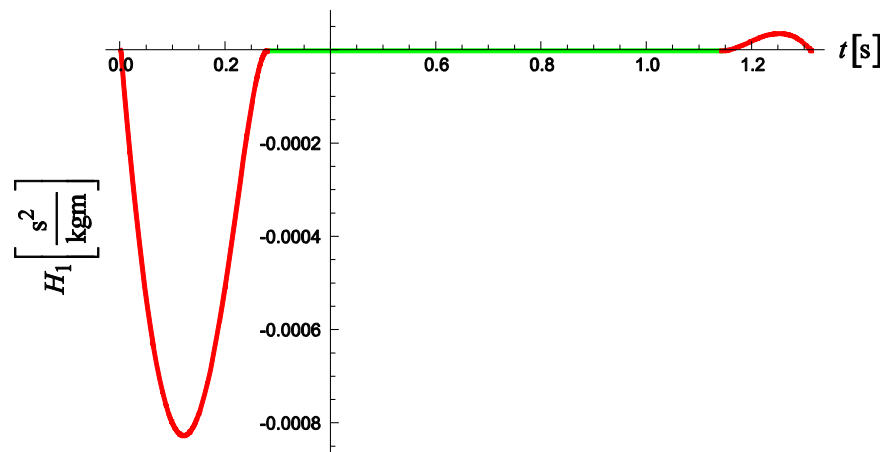
где су $\Gamma(z) \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ и $z = [t_f, t_1, t_2, x_f, \varphi_f, \lambda_x]$. Решавањем тако добијеног нелинеарног система једначина по $t_f, t_1, t_2, x_f, \varphi_f$ и λ_x , добијају се следеће граничне вредности: $t_f = 1,311606\text{s}, \varphi_f = -2,326496, t_1 = 1,140569\text{s}, t_2 = 0,278178\text{s}, x_f = 1,290454\text{m}$ и $\lambda_x = -0,093799\text{s/m}$. На слици 2.14 приказан је закон промене $y = y(x)$, док је на слици 2.15 приказан закони промене пројекције силе нормалне реакције при претходно одређеним граничним вредностима. На слици 2.16 приказан је закон промене функција прекида H_1 , док је на слици 2.17 приказан закон промене функције K .



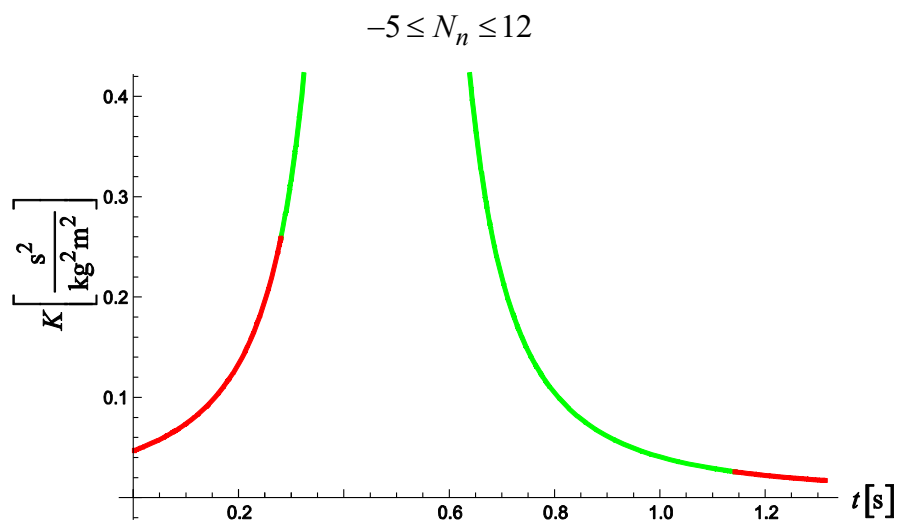
Слика 2.14 Трајекторија тачке M за случај несиметричног ограничења реакције везе $-5 \leq N_n \leq 12$



Слика 2.15 Пројекција $N_n = N_n(t)$ за случај несиметричног ограничења реакције везе $-5 \leq N_n \leq 12$



Слика 2.16 Функција прекида H_1 за случај несиметричног ограничења реакције везе



Слика 2.17 Функција K за случај несиметричног ограничења реакције везе

$$-5 \leq N_n \leq 12$$

Литература

- Agrachev, A., Sachkov, Y.: Control Theory from the Geometric Viewpoint, Springer, Berlin, 2004.
- Akulenko, L. D.: The brachistochrone problem for a disc, J. Appl. Math. Mech., 73(4), pp. 371–378, 2009.
- Antunes, A., Sigaud, C.: Controlling nonholonomic Chaplygin systems, Braz J Phys, 40, pp. 131-140, 2010.
- Ashby, N., Brittin, W. E., Love, W. F., Wyss, W.: Brachistochrone with Coulomb friction, Am. J. Phys., 43(10), pp. 902–906, 1975.
- Bhatt, S.: Optimal reorientation of spacecraft using only control moment gyroscopes, Master's Thesis, Rice University, U.S.A., 2007.
- Bloch, A. M.: Nonholonomic Mechanics and Control, Springer, Berlin, 2003.
- Brockett, R.W.: Control theory and singular Riemannian geometry, New Directions in Applied Mathematics, Springer, Berlin, pp.11–27, 1981.
- Bryson, A.E., Ho, Y.C.: Applied Optimal Control, Hemisphere, New York, 1975.
- Bullo, F., Lewis, A. D.: Geometric Control of Mechanical Systems, Springer, Berlin, 2005.
- Cortes, F., Martinez, S., Ostrowski, J. P., McIsaac, K. A.: Optimal gaits for dynamic robotic locomotion, The International Journal of Robotics Research, 20(9), pp. 707–728, 2001.
- Čović, V., Lukačević, M., Vesković, M.: On Brachistochronic Motions, Budapest University of Technology and Economics, Budapest, 2007.
- Čović, V., Lukačević, M.: Extension of the Bernoulli's case of a brachistochronic motion to the multibody system in the form of a closed kinematic chain, Facta Univ., Mech. Autom. Control Robot., 2(9), pp. 973–982, 1999.
- Čović, V., Vesković, M.: Brachistochrone on a surface with Coulomb friction, Int. J. Non-Linear Mech., 43(5), pp. 437–450, 2008.
- Čović, V., Vesković, M.: Brachistochronic motion of a multibody system with Coulomb friction, Eur. J. Mech. A, Solids, 28(9), pp. 882–890, 2009.

- Čović, V., Vesković, M.: Extension of the Bernoulli's case of brachistochronic motion to the multibody system having the form of a kinematic chain with external constraints, *Eur. J. Mech. A, Solids*, 21, pp. 347–354, 2002.
- Cruz, P. A. F., Torres, D. F. M.: Evolution strategies in optimization problems, *Proc. Est. Acad. Sci., Phys. Math.*, 56(4), pp. 299–309, 2007.
- Dooren, R. V., Vlassenbroeck, J.: A new look at the brachistochrone problem, *Z. Angew. Math. Phys.*, 31, pp. 785–790, 1980.
- Đukić, Đ., Atanacković, T. M.: A note on the classical brachistochrone, *Z. Angew. Math. Phys.*, 27, pp. 677–681, 1976.
- Đukić, Đ.: On the brachistochronic motion of a dynamic system, *Acta Mech.*, 32, pp. 181–186, 1979.
- Đukic, Đ.: The brachistochronic motion of a gyroscope mounted on the gimbals, *Theor. Appl. Mech.*, 2, pp. 37–40, 1976.
- Đukić, Đ.: The brachistochronic motion of a material point on surface, *Riv. Mat. Univ. Parma*, 4(2), pp. 177–183, 1976.
- Elsgolc, L.E.: *Calculus of Variations*, Pergamon Press, Oxford, 1963.
- Erlichson, H.: Johann Bernoulli's brachistochrone solution using Fermat's principle of least time, *Eur. J. Phys.*, 20, pp. 299–304, 1999.
- Gabasov, R., Kirillova, F.M.: *Singular Optimal Controls*, Nauka, Moscow, 1973.
- Gelfand, I.M., Fomin, S.V.: *Calculus of Variations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1964.
- Gershman, M. D., Nagaev, R. F.: The oscillation brachistochrone problem, *Mech. Solids*, 14(2), pp. 9–17, 1979.
- Gershman, M.D., Nagaev, R.F.: O frikcionnoj brakhistokhrone, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Meh. Tverd. Tela*, 4, pp. 85–88, 1976.
- Goldstine, H. H.: *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- Graichen, K., Petit, N.: A continuation approach to state and adjoint calculation in optimal control applied to the reentry problem, In: *Proceedings of the 17th World congress the international federation of automatic control Seoul, Korea*, pp. 14307–14312, July 6–11 2008.

- Hayen, J. C.: Brachistochrone with Coulomb friction, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 40, pp. 1057–1075, 2005.
- Hennessey, M. P., Shakiban, Ch.: Brachistochrone on a 1D curved surface using optimal control, *J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 132, 034505, 2010.
- Ivanov, A. I.: On the brachistochrone of a variable mass point with constant relative rates of particle throwing away and adjoining, *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR Ser. A*, pp. 683–686, 1968.
- Jeremić, O., Šalinić, S., Obradović, A., Mitrović, Z.: On the brachistochrone of a variable mass particle in general force fields, *Math Comput Model*, 54, pp. 2900–2912, 2011.
- Julstrom, B. A.: Evolutionary algorithms for two problems from the calculus of variations, In: *Lecture Notes in Computer Science, Genetic and Evolutionary Computation-GECCO*, Springer, Berlin, pp. 2402–2403, 2003.
- Kang, W., Bedrossian, N.: Pseudospectral optimal control theory makes debut flight, saves NASA 1m in under three hours, *SIAM News*, 40(7), 2007.
- Kelley, H.J., Kopp, R.E., Moyer, H.G.: Singular extremals in optimal control, in: G. Leitmann (Ed.), *Topics in Optimization*, Academic Press, New York, London, pp. 63–101, 1967.
- Kirk, D. E.: *Optimal control theory: An introduction*, New York: Dover Publications, 2004.
- Koon, W. S., Marsden, J. E.: Optimal control for holonomic and nonholonomic mechanical systems with symmetry and Lagrangian reduction, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35(3), pp. 901–929, 1997.
- Legeza, P. V.: Conditions for pure rolling of a heavy cylinder along a brachistochrone, *Int. Appl. Mech.*, 46(6), pp. 730–735, 2010.a.
- Legeza, P.V.: Quickest-descent curve in the problem of rolling of a homogeneous cylinder, *Int. Appl.Mech.*, 44(12), pp. 1430–1436, 2008.
- Legeza, V. P.: Brachistochrone for a rolling cylinder, *Mech. Solids*, 45(1), pp. 27–33, 2010.b.
- Leitman, G.: *An Introduction to Optimal Control*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- Lipp, S. C.: Brachistochrone with Coulomb friction, *SIAM J. Control Optim.*, 35(2), pp. 562–584, 1997.

- Maisser, P.: Brachystochronen als zeitkrzeste Fahrspuren von Bobschlitten, ZAMM, 78(5), pp. 311–319, 1998.
- Mallipeddi, R., Suganthan, P.N., Pan, Q.K., Tasgetiren, M.F.: Differential evolution algorithm with ensemble of parameters and mutation strategies, Applied Soft Computing, 11, pp. 1679-1696, 2011.
- Martinez, S., Cortes, J., de Leon M.: Symmetries in vakonomic dynamics: applications to optimal control, Journal of Geometry and Physics, 38, pp. 343–365, 2001.
- Martynenko, Yu. G.:The theory of the generalized Magnus efect for nonholonomic mechanical systems, PMM-J. Appl. Math. Mech., 68, 847-855, 2004.
- Maruskin, J.M., Bloch, A.M.: The Boltzmann–Hamel equations for optimal control, The Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, LA, pp. 554–559, 12–14 December 2007.
- Matyukhin, V.I.: Control of a wheeled system taking into account its inertial properties, Mech. Solids, 48, pp. 243-253, 2013.
- Matyukhin, V.I.: The control of a wheeled mechanical system, PMM-J. Appl. Math. Mech., 71, pp. 208-220, 2007.
- McDanell, J. P., Powers, W. F.: Necessary conditions for joining optimal singular and nonsingular subarcs, SIAM J. Control, 9(2), pp. 161–173, 1971.
- Mehrpouya, M. A., Shamsi, M.: Gauss pseudospectral and continuation methods for solving two-point boundary value problems in optimal control theory, Appl Math Model, 39, pp. 5047–5057, 2015.
- Nijmeijer, H., van der Schaft, A. J.: Nonlinear Dynamical Control Systems, Springer, Berlin, 1990.
- Obradović, A., Čović, V., Vesković, M., Dražić, M.: Brachistochronic motion of a nonholonomic rheonomic mechanical system. ActaMech., 214(3–4), pp. 291–304, 2010.
- Obradović, A., Šalinić, S., Jeremić, O.: On the brachistochronic motion of a variable-mass mechanical system in general force fields, Math Mech Solids, 19, pp. 398-410, 2014.
- Obradović, A.: Singularna optimalna upravljanja mehaničkih sistema, Doktorska disertacija, Beograd, 1994.

- Park, Ch., Guibout, V., Scheeres, D.: Solving optimal continuous thrust rendezvous problems with generating functions, *J Guid Control Dyn*, 29, pp. 321–331, 2006.
- Parnovsky, A.S.: Some generalisations of brachistochrone problem. *Acta Phys. Pol. A*, 93, S55–S64, 1998.
- Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., Mishchenko, E.F.: *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley, New Jersey, 1962.
- Razzaghi, M., Sepehrian, B.: Single-term Walsh series direct method for the solution of nonlinear problems in the calculus of variations, *J. Vib. Control*, 10, pp. 1071–1081, 2004.
- Russalovskaya, A. V., Ivanov, G. I., Ivanov, A. I.: On brachistochrone of the variable mass point during motion with friction with an exponential rule of mass rate flow, *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR Ser. A*, pp. 1024–1026, 1973.
- Šalinić, S., Obradović, A., Mitrović, Z., Rusov, S.: Brachistochrone with limited reaction of constraint in an arbitrary force field, *Nonlinear Dynamics*, 69, pp. 211–222, 2012.
- Šalinić, S., Obradović, A., Mitrović, Z., Rusov, S.: Erratum: Brachistochrone with limited reaction of constraint in an arbitrary force field (*Nonlinear Dynamics*, 69, pp. 211–222, 2012), *Nonlinear Dynamics*, 70, pp. 891–892, 2012.
- Šalinić, S., Obradović, A., Mitrović, Z.: On the brachistochronic motion of the Chaplygin sleigh, *Acta Mech*, 224, pp. 2127–2141, 2013.
- Šalinić, S.: Contribution to the brachistochrone problem with Coulomb friction, *Acta Mech.*, 208(1–2), pp. 97–115, 2009.
- Shevchenko, K. N.: Brachistochrone and the principle of least action, *Mech. Solids*, 21(2), pp. 36–42, 1986.
- Shevchenko, K. N.: Time-optimal motion of a point acted upon by a system of central forces, *Mech. Solids*, 19(6), pp. 25–31, 1984.
- Singh, B., Kumar, R.: Brachistochrone problem in nonuniform gravity, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 19(6), pp. 575–585, 1988.
- Stoer, J., Bulirsch, J.: *Introduction to Numerical Analysis*, Springer, Berlin, 1993.
- Stork, D.G., Yang, J.: The general unrestrained brachistochrone, *Am. J. Phys.*, 56(1), pp. 22–26, 1988.

- Van der Heijden, A. M. A., Diepstraten, J. D.: On the brachistochrone with dry friction, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 10, pp. 97–112, 1975.
- von Kleinschmidt, W., Schulze, H. K.: Brachistochronen in einem zentralsymmetrischen Schwerefeld, *ZAMM*, 50, T234–T236, 1970.
- Vratanar, B., Saje, M.: On the analytical solution of the brachistochrone problem in a non-conservative field, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 33(3), pp. 489–505, 1998.
- Vujanović, B. D.: *Metodi optimizacije*, Novi Sad, 1980.
- Vuković, J.: *Optimalno upravljanje kretanjem mehaničkih sistema*, Doktorska disertacija, Beograd, 1984.
- Wensrich, C. M.: Evolutionary solutions to the brachistochrone problem with Coulomb friction, *Mech. Res. Commun.*, 31, pp. 151–159, 2004.
- Zeković, D., Čović, V.: On the brachistochronic motion of mechanical systems with linear nonholonomic nonhomogeneous constraints, *Mech. Res. Commun.*, 20(1), pp. 25–35, 1993.
- Zeković, D.: On the brachistochronic motion of mechanical systems with non-holonomic, non-linear and rheonomic constraints, *J. Appl. Math. Mech.*, 54(6), pp. 931–935, 1990.

Поглавље 3

Глобални минимум времена при брахистохроном кретању материјалне тачке у произвољном потенцијалном пољу сила

3.1 Формулација проблема оптималног управљања

Разматра се кретање материјалне тачке M , масе m , у простору $Oxyz$ Декартовог правоуглог координатног система референције, где је оса Oz усмерена вертикално наниже. Јединични вектори оса Ox, Oy и Oz су \vec{i}, \vec{j} и \vec{k} респективно. Тачка M креће се дуж глатке просторне линије, која се третира као задржавајућа (билатерална) веза, у произвољном пољу познатих потенцијалних сила. Тачка започиње кретање из положаја

$$t_0 = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0. \quad (3.1)$$

Кинетичка и потенцијална енергија [Lurie, 2002; Papastavridis, 2002] тачке M респективно су

$$T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m V^2, \quad (3.2)$$

$$\Pi = \Pi(x, y, z), \quad (3.3)$$

где је $V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$. Имајући у виду да се тачка M креће у произвољном пољу познатих потенцијалних сила, важи „закон” о одржању укупне механичке енергије [Lurie, 2002; Papastavridis, 2002]

$$\Phi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) + \Pi(x, y, z) - E_0 = 0, \quad (3.4)$$

где је $E_0 \in \mathbb{R}$ вредност механичке енергије тачке у почетном тренутку $t_0 = 0$. Брахистохрони проблем тачке може бити формулисан као задатак оптималног управљања. Наиме, узимањем пројекција брзине тачке M на осе Ox, Oy и Oz за управљачке променљиве u_x, u_y и u_z респективно

$$\dot{x} = u_x, \quad \dot{y} = u_y, \quad \dot{z} = u_z, \quad (3.5)$$

брахистохрони проблем тачке састоји се у одређивању екстремалних управљања $u_x = u_x(t), u_y = u_y(t)$ и $u_z = u_z(t)$, као и њима одговарајућих коначних једначина кретања $x = x(t), y = y(t)$ и $z = z(t)$, тако да тачка, која започиње кретање из положаја (3.1), пређе у крајњи положај на многострукост

$$t = t_f, \quad \Psi_f(x_f, y_f, z_f) = 0, \quad (3.6)$$

уз неизмењену вредност механичке енергије (3.4), за минимално време t_f . То се може изразити у виду услова да функционал

$$J(x, y, z, u_x, u_y, u_z) = \int_0^{t_f} dt, \quad (3.7)$$

на интервалу $[0, t_f]$ има минималну вредност.

3.2 Решење проблема оптималног управљања

У циљу решења проблема оптималног управљања, формира се Понтрјагинова функција у следећем облику [Vuković, 1984; Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962; Bryson, Ho, 1975; Hull, 2003; Hull, 1990]

$$H(x, y, z, u_x, u_y, u_z, \lambda) = \lambda_0 + \lambda_x u_x + \lambda_y u_y + \lambda_z u_z, \quad (3.8)$$

где је $\lambda = (\lambda_0, \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)^T$ спрегнути вектор и $\lambda_0 = \text{const.} \leq 0$ (видети [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962; Bryson, Ho, 1975; Hull, 2003]), док су $\lambda_x(\cdot): [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda_y(\cdot): [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ и $\lambda_z(\cdot): [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$. Имајући у виду граничне услове (3.1) и (3.6), као и чињеницу да време не фигурише експлицитно у једначинама стања (3.5), постављени проблем оптималног управљања може се решити директном применом Теореме 22 [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962]. Спрегнути систем диференцијалних једначина, имајући у виду Понтрјагинову функцију (3.8) као и релацију ограничења (3.4), има следећи облик [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962]

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \mu \frac{\partial \Pi(x, y, z)}{\partial x}, \\ \dot{\lambda}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \mu \frac{\partial \Pi(x, y, z)}{\partial y}, \\ \dot{\lambda}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \mu \frac{\partial \Pi(x, y, z)}{\partial z},\end{aligned}\tag{3.9}$$

где је μ Лагранжев множитељ. Услови трансверзалности у почетном тренутку $t_0 = 0$ су идентички задовољени, имајући у виду да је почетни положај (3.1) тачке у потпуности одређен. Услови трансверзалности у крајњем тренутку t_f су

$$\lambda_x(t_f) \Delta x(t_f) + \lambda_y(t_f) \Delta y(t_f) + \lambda_z(t_f) \Delta z(t_f) = 0,\tag{3.10}$$

где је, у складу са (3.6)

$$\frac{\partial \Psi_f}{\partial x_f} \Delta x(t_f) + \frac{\partial \Psi_f}{\partial y_f} \Delta y(t_f) + \frac{\partial \Psi_f}{\partial z_f} \Delta z(t_f) = 0,\tag{3.11}$$

где $\Delta(\cdot)$ представља асинхрону варијацију [Elsgolc, 1963; Gelfand, Fomin, 1964] величине (\cdot) . Сада, имајући у виду независност варијација $\Delta x(t_f)$ и $\Delta y(t_f)$, могу се формирати, на основу (3.10) и (3.11), следећи гранични услови

$$\Psi_{f1}^*(x_f, y_f, z_f, \lambda_{xf}, \lambda_{zf}) = \lambda_{xf} - \frac{(\partial \Psi_f / \partial x_f)}{(\partial \Psi_f / \partial z_f)} \lambda_{zf} = 0, \quad (3.12)$$

$$\Psi_{f2}^*(x_f, y_f, z_f, \lambda_{yf}, \lambda_{zf}) = \lambda_{yf} - \frac{(\partial \Psi_f / \partial y_f)}{(\partial \Psi_f / \partial z_f)} \lambda_{zf} = 0,$$

где су $\lambda_{xf} = \lambda_x(t_f)$, $\lambda_{yf} = \lambda_y(t_f)$ и $\lambda_{zf} = \lambda_z(t_f)$ координате спрегнутог вектора одређене у крајњем тренутку. Уколико дозвољена управљања припадају отвореном скупу, као што је то у овом случају, услови на основу којих се одређују екстремална управљања могу се изразити у облику [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962]

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = \mu \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}, \quad i = x, y, z. \quad (3.13)$$

Из услова (3.13), имајући у виду (3.2), (3.4) и (3.8), координате λ_x, λ_y и λ_z спрегнутог вектора могу се изразити у следећем облику

$$\lambda_i = \mu u_i, \quad i = x, y, z. \quad (3.14)$$

Када време t_f није унапред одређено, као што је то у овом случају, потребно је придружити услов, што следи директном применом Теореме 1 [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962], да је вредност Понтрјагинове функције на екстремалној трајекторији у сваком тренутку једнака нули [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962; Bryson, Ho, 1975; Hull, 2003]

$$H(t) = 0, \quad (3.15)$$

односно, у складу са Понтрјагиновом функцијом (3.8), можемо писати

$$\lambda_0 + \lambda_x u_x + \lambda_y u_y + \lambda_z u_z = 0. \quad (3.16)$$

На основу (3.2), (3.3), (3.4), (3.14) и (3.16), одређен је Лагранжев множитељ μ

$$\mu(x, y, z) = -\frac{\lambda_0}{2[E_0 - \Pi(x, y, z)]}. \quad (3.17)$$

На основу (3.14) и (3.17), одређена су екстремална управљања u_x, u_y и u_z у следећем облику

$$u_i(x, y, z, \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z) = -\frac{2[E_0 - \Pi(x, y, z)]}{m\lambda_0} \lambda_i, \quad i = x, y, z, \quad (3.18)$$

међу којима треба тражити оптимална. Уколико је екстремално управљање јединствено, онда је и оптимално, што не искључује могућност да, за нејединствено екстремално управљање, постоји и нејединствен оптимално управљање.

Сада, на основу (3.5), (3.9), (3.17) и (3.18), можемо формирати основни и спрегнути систем диференцијалних једначина првог реда у нормалном облику

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{2[E_0 - \Pi(x, y, z)]}{m\lambda_0} \lambda_x, \\ \dot{y} &= -\frac{2[E_0 - \Pi(x, y, z)]}{m\lambda_0} \lambda_y, \\ \dot{z} &= -\frac{2[E_0 - \Pi(x, y, z)]}{m\lambda_0} \lambda_z, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_x &= -\frac{\lambda_0}{2[E_0 - \Pi(x, y, z)]} \frac{\partial \Pi(x, y, z)}{\partial x}, \\ \dot{\lambda}_y &= -\frac{\lambda_0}{2[E_0 - \Pi(x, y, z)]} \frac{\partial \Pi(x, y, z)}{\partial y}, \\ \dot{\lambda}_z &= -\frac{\lambda_0}{2[E_0 - \Pi(x, y, z)]} \frac{\partial \Pi(x, y, z)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

О избору непозитивне константе λ_0 у наставку ће бити више речи.

3.3 Одређивање интервала вредности непознатих координата спрегнутог вектора у почетном тренутку

На основу релације (3.16) одређене у почетном тренутку $t_0 = 0$, имајући у виду притом (3.18), добија се следећа позитивно дефинитна квадратна форма у канонском облику [Strang, 1988]

$$\lambda_{x0}^2 + \lambda_{y0}^2 + \lambda_{z0}^2 = \frac{m\lambda_0^2}{2(E_0 - \Pi_0)} = \text{const.}, \quad (3.21)$$

где су $\Pi_0 = \Pi(x_0, y_0, z_0)$, $\lambda_{x0} = \lambda_x(t_0)$, $\lambda_{y0} = \lambda_y(t_0)$ и $\lambda_{z0} = \lambda_z(t_0)$. Уколико је $\lambda_0 = 0$ [Leitmann, 1981], из (3.17), (3.20) и (3.21) следи да су $\mu(t) \equiv 0$, $\lambda_x(t) \equiv 0$, $\lambda_y(t) \equiv 0$ и $\lambda_z(t) \equiv 0$, односно све координате спрегнутог вектора су идентички једнаке нули. Неопходни услови оптималности, одређени Теоремом 1 [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962], за $\lambda_0 = 0$ нису задовољени, с обзиром да је спрегнути вектор за $\lambda_0 = 0$ нула вектор, што је у супротности са принципом максимума.

Нумерички поступак применом кога ћемо одредити непознате граничне вредности одговарајућег TPBVP, заснован је на методи шутинга [Stoer, Bulirsch, 1993]. Тропараметарски шутинг састоји се у одређивању непознатих координата λ_{x0} и λ_{y0} спрегнутог вектора у почетном тренутку, ако се има у виду да се једна од координата спрегнутог вектора, рецимо λ_{z0} , може изразити из релације (3.21) у следећем облику

$$\lambda_{z0} = \pm \sqrt{\frac{m\lambda_0^2}{2(E_0 - \Pi_0)} - (\lambda_{x0}^2 + \lambda_{y0}^2)}, \quad (3.22)$$

као и минимално потребног времена t_f . Нумерички поступак састоји се у „гађању” крајњих граничних услова (3.6) и (3.12), у складу са (3.19) и (3.20). У примени методе шутинга, неопходно је одредити процене интервала вредности непознатих граничних вредности λ_{x0} , λ_{y0} и t_f . Глобалне процене интервала вредности координата λ_{x0} , λ_{y0} и λ_{z0} спрегнутог вектора у почетном тренутку могу се одредити на основу канонске форме (3.21) у следећем облику

$$\begin{aligned} -\sqrt{\frac{m\lambda_0^2}{2(E_0 - \Pi_0)}} &\leq \lambda_{x0} \leq \sqrt{\frac{m\lambda_0^2}{2(E_0 - \Pi_0)}}, \\ -\sqrt{\frac{m\lambda_0^2}{2(E_0 - \Pi_0)}} &\leq \lambda_{y0} \leq \sqrt{\frac{m\lambda_0^2}{2(E_0 - \Pi_0)}}, \\ -\sqrt{\frac{m\lambda_0^2}{2(E_0 - \Pi_0)}} &\leq \lambda_{z0} \leq \sqrt{\frac{m\lambda_0^2}{2(E_0 - \Pi_0)}}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

док је $t_f \geq 0$. На основу датих процена, може се тврдити да се сва решења одговарајућег TPBVP сигурно налазе унутар датих интервала, а самим тим и глобални минимум времена при брахистохроном кретању тачке M . У случају вишеструких решења принципа максимума, глобални минимум је оно решење које одговара минималном времену. С обзиром да је крајњи циљ одредити оно решење TPBVP које одговара минималном времену, одредићемо решења TPBVP у интервалу крајњег тренутка

$$0 \leq t_f \leq t_f^*, \quad (3.24)$$

где је t_f^* дата позитивна константа. У том циљу, успоставимо следеће функционалне релације у нумеричком облику

$$\Gamma(z) = \left[\Psi_f(x_f, y_f, z_f), \Psi_{f1}^*(x_f, y_f, z_f, \lambda_{xf}, \lambda_{zf}), \Psi_{f2}^*(x_f, y_f, z_f, \lambda_{yf}, \lambda_{zf}) \right]^T \quad (3.25)$$

$$= \mathbf{0}_{3 \times 1},$$

где су $\Gamma(z) \equiv [\Gamma_1(z), \Gamma_2(z), \Gamma_3(z)]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ шутинг функција [Jiang, Baoyin, Li, 2012]

и $z = [\lambda_{x0}, \lambda_{y0}, t_f]$. Избором непозитивне, а како је показано и ненулте константе λ_0 ,

непосредно утичемо на процене интервала вредности координата $\lambda_{x0}, \lambda_{y0}$ и λ_{z0} .

Сходно томе, мањим вредностима константе λ_0 одговара ужи интервал вредности координата $\lambda_{x0}, \lambda_{y0}$ и λ_{z0} , па самим тим и краће време трајања нумеричког процеса у самом поступку одређивања решења.

Решења TPBVP могу бити геометријски представљена у простору \mathbb{R}^3 са осама $\lambda_{x0}, \lambda_{y0}$ и t_f , имајући у виду (3.23) и (3.24), посредством уграђене **ContourPlot3D()** *Mathematica* функције (видети [Ruskeepää, 2009]). Наиме, сада је могуће у простору $(\lambda_{x0}, \lambda_{y0}, t_f)$ одредити пресек површи (3.25) као

$$p_f = \Gamma_1(\lambda_{x0}, \lambda_{y0}, t_f) \cap \Gamma_3(\lambda_{x0}, \lambda_{y0}, t_f), \quad (3.26)$$

$$q_f = \Gamma_2(\lambda_{x0}, \lambda_{y0}, t_f) \cap \Gamma_3(\lambda_{x0}, \lambda_{y0}, t_f),$$

где су p_f и q_f просторне линије представљене следећим функционалним зависностима у нумеричком облику

$$p_f = f_p(\lambda_{x0}, t_f), \quad q_f = f_q(\lambda_{x0}, t_f). \quad (3.27)$$

Сада, решења TPBVP могу се геометријски представити тачкама добијеним пресеком просторних линија (3.27), у простору $(\lambda_{x0}, \lambda_{y0}, t_f)$, као

$$f_p(\lambda_{x0}, t_f) \cap f_q(\lambda_{x0}, t_f) = \{M_1, \dots, M_r\}. \quad (3.28)$$

Број елемената скупа (3.28) једнак је броју решења TPBVP, док координате пресечних тачака у простору $(\lambda_{x0}, \lambda_{y0}, t_f)$ представљају решења TPBVP.

3.4 Нумерички пример

Разматра се кретање материјалне тачке M , масе $m = 3\text{kg}$, која је везана опругом крутоси $c = 200\text{N/m}$, слободне дужине $l_0 = 0,2\text{m}$. Други крај опруге везан је за непокретну тачку O . Тачка M започиње кретање и положаја

$$t_0 = 0, \quad x(t_0) = 0, \quad y(t_0) = 0, \quad z(t_0) = 0,2\text{m}. \quad (3.29)$$

У разматраном примеру, гранични услови (3.6) и (3.12) имају следећи облик

$$\begin{aligned} \Psi_f &= z_f - a \left(5 + \sin\left(\frac{x_f}{a}\right) + \sin\left(\frac{y_f}{a}\right) \right) = 0, \\ \Psi_{f1}^* &= \lambda_{xf} + \lambda_{zf} \cos\left(\frac{x_f}{a}\right) = 0, \\ \Psi_{f2}^* &= \lambda_{yf} + \lambda_{zf} \cos\left(\frac{y_f}{a}\right) = 0, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где је $a = 1\text{m}$. Потенцијална енергија тачке у разматраном примеру одређена је следећим изразом

$$\Pi = -mgz + \frac{1}{2}c \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - l_0 \right)^2. \quad (3.31)$$

Основни, као и спрегнути систем за $\lambda_0 = -1$ [Leitmann, 1981; Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962], у складу са (3.19), (3.20) и (3.31), има следећи облик

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{2 \left[E_0 + mgz - \frac{1}{2} c \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - l_0 \right)^2 \right]}{m} \lambda_x, \\
\dot{y} &= \frac{2 \left[E_0 + mgz - \frac{1}{2} c \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - l_0 \right)^2 \right]}{m} \lambda_y, \\
\dot{z} &= \frac{2 \left[E_0 + mgz - \frac{1}{2} c \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - l_0 \right)^2 \right]}{m} \lambda_z,
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_x &= \frac{cx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)}{2 \left[E_0 + mgz - \frac{1}{2} c \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - l_0 \right)^2 \right]}, \\
\dot{\lambda}_y &= \frac{cy \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)}{2 \left[E_0 + mgz - \frac{1}{2} c \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - l_0 \right)^2 \right]}, \\
\dot{\lambda}_z &= \frac{cz \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) - mg}{2 \left[E_0 + mgz - \frac{1}{2} c \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - l_0 \right)^2 \right]},
\end{aligned} \tag{3.33}$$

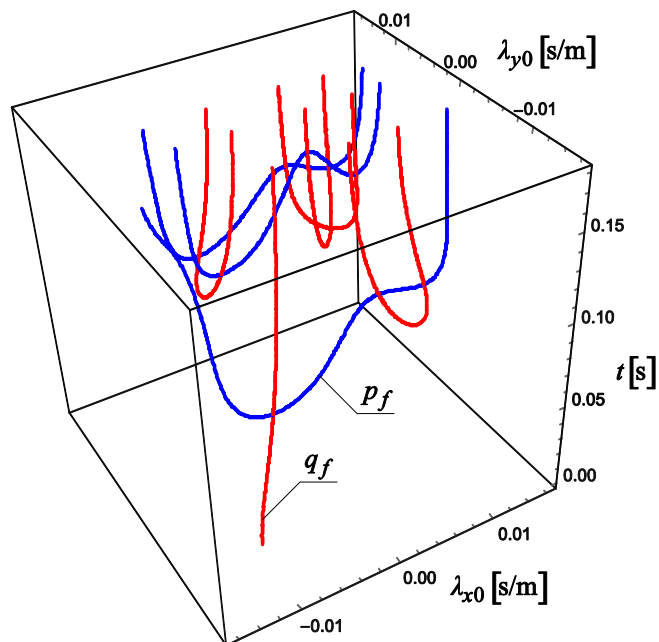
где је у разматраном примеру $E_0 = 5500 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$. Глобалне процене интервала вредности координата $\lambda_{x0}, \lambda_{y0}$ и λ_{z0} , на основу (3.23), су

$$\begin{aligned}
-0,0165 &\leq \lambda_{x0} \leq 0,0165, \\
-0,0165 &\leq \lambda_{y0} \leq 0,0165, \\
-0,0165 &\leq \lambda_{z0} \leq 0,0165.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

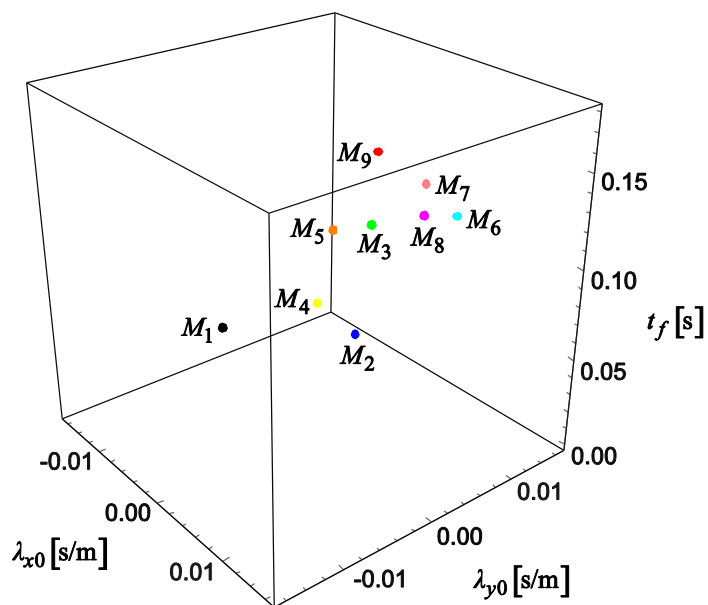
Одредићемо решења TPBVP у интервалу крајњег тренутка

$$0 \leq t_f \leq 0,18 \text{ s.} \tag{3.35}$$

На слици 3.1 приказане су просторне линије p_f и q_f , док су на слици 3.2 приказане пресечне тачке просторних линија. Са слике 3.1, односно слике 3.2, евидентно је да ТРВРП нема јединствено решење.



Слика 3.1 Пресек просторних линија $p_f = f_p(\lambda_{x0}, t_f)$ и $q_f = f_q(\lambda_{x0}, t_f)$



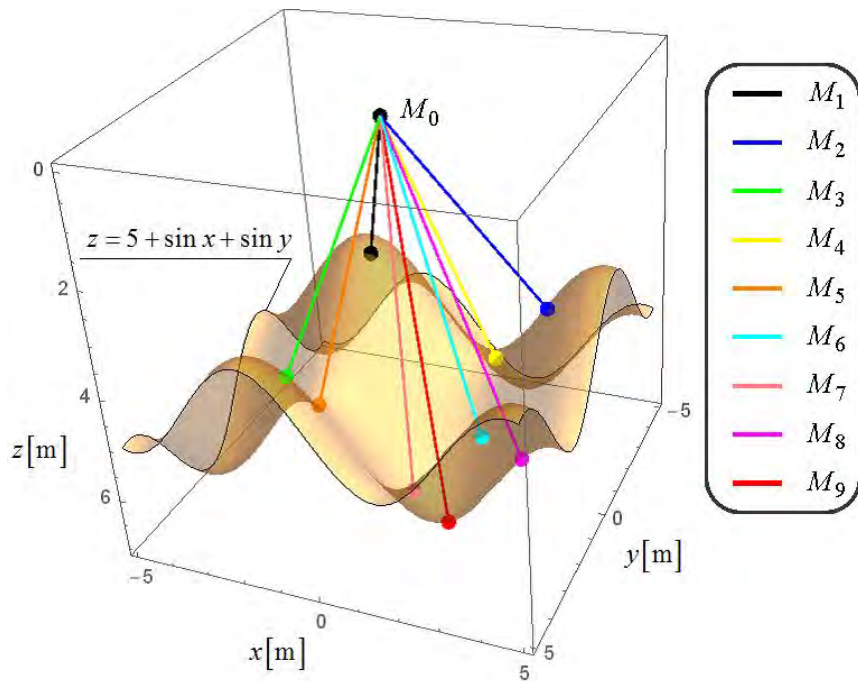
Слика 3.2 Пресечне тачке M_i ($i = \overline{1,9}$) просторних линија $p_f = f_p(\lambda_{x0}, t_f)$ и $q_f = f_q(\lambda_{x0}, t_f)$

У табели 3.1 приказана су решења ТРВVP за $\lambda_{z0} = \sqrt{\frac{m}{2(E_0 - \Pi_0)} - (\lambda_{x0}^2 + \lambda_{y0}^2)}$, док решења ТРВVP за $\lambda_{z0} = -\sqrt{\frac{m}{2(E_0 - \Pi_0)} - (\lambda_{x0}^2 + \lambda_{y0}^2)}$ не постоје.

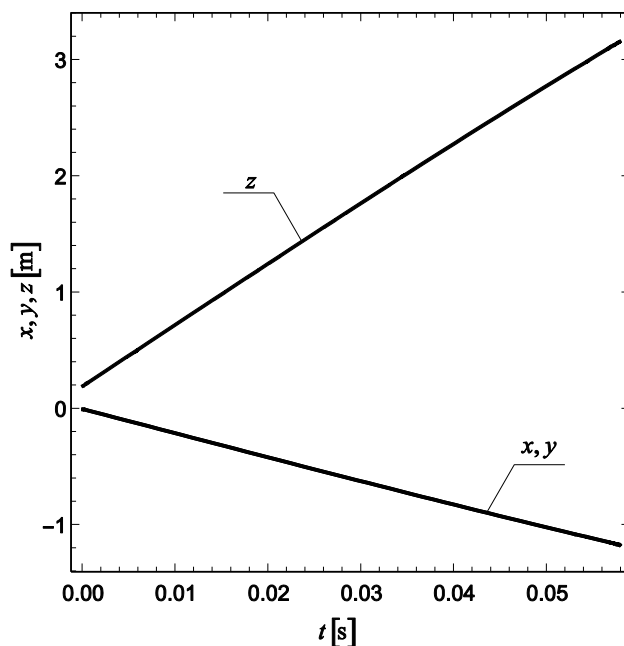
Табела 3.1 Нумеричка решења ТРВVP

Решења	t_f [s]	λ_{x0} [s/m]	λ_{y0} [s/m]
Прво решење (M_1)	0,057798	-0,005680	-0,005680
Друго решење (M_2)	0,091917	0,011108	-0,003956
Треће решење (M_3)	0,091917	-0,003956	0,011108
Четврто решење (M_4)	0,096656	0,006239	-0,004027
Пето решење (M_5)	0,096656	-0,004027	0,006239
Шесто решење (M_6)	0,125569	0,009218	0,009218
Седмо решење (M_7)	0,133524	0,004878	0,009556
Осмо решење (M_8)	0,133524	0,009556	0,004878
Девето решење (M_9)	0,156655	0,004235	0,004235

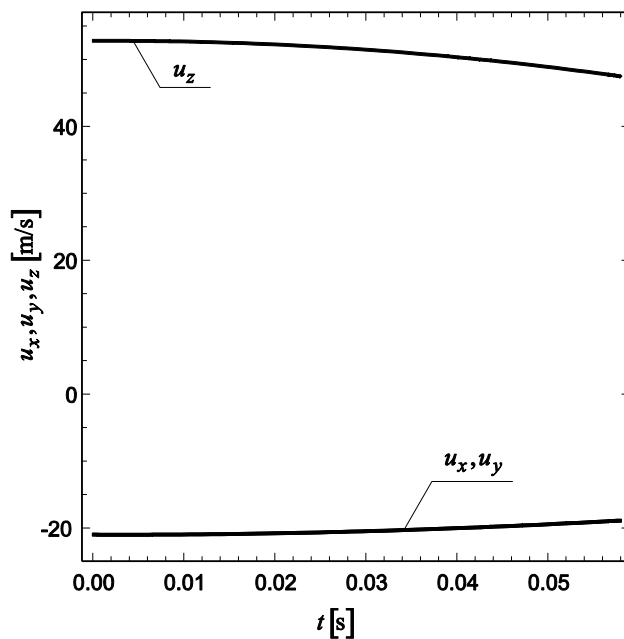
На слици 3.3 приказане су трајекторије тачке M при одређеним граничним вредностима датих у табели 3.1. На основу одређених вредности, може се закључити да глобални минимум времена при брахистохроном кретању тачке M у простору одговара првом решењу (тачка M_1 приказана на слици 3.2) и износи $t_f = 0,057798$ s .



Слика 3.3 Трајекторије тачке M које одговарају респективно решењима $M_i (i = \overline{1,9})$.
 На слици 3.4 графички су приказане коначне једначине кретања $x = x(t), y = y(t)$ и $z = z(t)$ тачке M које одговарају првом решењу M_1 , док су на слици 3.5 приказана оптимална управљања $u_x = u_x(t), u_y = u_y(t)$ и $u_z = u_z(t)$.



Слика 3.4 Коначне једначине кретања $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$ тачке M које одговарају првом решењу (M_1)



Слика 3.5 Оптимална управљања $u_x = u_x(t)$, $u_y = u_y(t)$ и $u_z = u_z(t)$

У овом примеру, имајући у виду прве две једначине како основног (3.32), тако и спрегнутог (3.32) система, може се показати да је $y = \lambda_{y0} x / \lambda_{x0}$.

Поглавље 4

Глобални минимум времена при брахистохроном кретању холономног механичког система

4.1 Формулација и решење проблема оптималног управљања

Разматра се кретање холономног склерономног конзервативног механичког система са n степена слободe. Конфигурација система одређена је са n генералисаних координата $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)^T$. Кинетичка и потенцијална енергија система респективно су дате као [Lurie, 2002; Papastavridis, 2002]

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j, \quad (4.1)$$

$$\Pi = \Pi(\mathbf{q}), \quad (4.2)$$

где је $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)^T$ вектор генералисаних брзина, док су $a_{ij} = a_{ij}(\mathbf{q})$ координате коваријантног метричког тензора. Механички систем започиње кретање из положаја одређеног генералисаним координатама

$$t_0 = 0, \quad q^i(t_0) = q_0^i, \quad (4.3)$$

³⁶ Индекси у Поглављу 4 узимају следеће вредности: $i, j, r, s = \overline{1, n}; k = \overline{1, m}; l = \overline{m+1, n}$.

док је крајњи положај система одређен на многострукости

$$t = t_f, \Psi_k(\mathbf{q}_f) = 0, \quad (4.4)$$

где је $\mathbf{q}_f = (q_f^1, \dots, q_f^n)^T$, $q_f^i = q^i(t_f)$. Имајући у виду да се механички систем креће у произвољном пољу познатих потенцијалних сила, важи „закон” о одржању укупне механичке енергије [Lurie, 2002; Papastavridis, 2002]

$$\Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \Pi(\mathbf{q}) - E_0 = 0, \quad (4.5)$$

где је $E_0 \in \mathbb{R}$ вредност механичке енергије система у почетном тренутку $t_0 = 0$.

Узимањем генералисаних брзина \dot{q}^i за управљачке променљиве u^i респективно

$$\dot{q}^i = u^i, \quad (4.6)$$

брахистохрони проблем механичког система састоји се у одређивању екстремалних управљања $u^i = u^i(t)$, као и њима одговарајућих генералисаних координата $q^i = q^i(t)$, тако да механички систем који започиње кретање из положаја (4.3), пређе у крајњи положај на многострукости (4.4), уз неизмењену вредност механичке енергије (4.5), за минимално време t_f . То се може изразити у виду услова да функционал

$$J(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = \int_0^{t_f} dt, \quad (4.7)$$

где је $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n)^T$ вектор управљања из отвореног скупа G_u векторског простора V_m , на интервалу $[0, t_f]$ има минималну вредност. У циљу решења проблема оптималног управљања, формира се Понтрјагинова функција у следећем облику [Vuković, 1984; Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962; Bryson, Ho, 1975; Hull, 2003; Hull, 1990]

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 + \lambda_i u^i, \quad (4.8)$$

³⁷ Користи се Ајнштајнова конвенција о сабирању.

где је $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ спрегнути вектор и $\lambda_0 = \text{const.} \leq 0$, док су $\lambda_i(\cdot) : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$.

Имајући у виду граничне услове (4.3) и (4.4), као и чињеницу да време не фигурише експлицитно у једначинама стања (4.6), постављени проблем оптималног управљања може се решити директном применом Теореме 22 [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962]. Спрегнути систем диференцијалних једначина, имајући у виду Понтрјагинову функцију (4.8), као и релацију ограничења (4.5), има следећи облик [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962]

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial q^i} = \mu \frac{\partial \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{u})}{\partial q^i}, \quad (4.9)$$

где је μ Лагранжев множитељ. Уколико дозвољена управљања припадају отвореном скупу, као што је то у овом случају, услови на основу којих се одређују екстремална управљања могу се изразити у облику [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962]

$$\frac{\partial H}{\partial u^i} = \mu \frac{\partial \Phi}{\partial u^i}. \quad (4.10)$$

Из услова (4.10), имајући у виду (4.1), (4.5) и (4.8), координате λ_i спрегнутог вектора могу се изразити у следећем облику

$$\lambda_i = \mu a_{ij} u^j. \quad (4.11)$$

Када крајњи тренутак t_f није унапред одређен, као што је то у овом случају, потребно је придружити услов, што следи директном применом Теореме 1 [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962], да је вредност Понтрјагинове функције на екстремалној трајекторији у сваком тренутку једнака нули [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962; Bryson, Ho, 1975; Hull, 2003]

$$H(t) = 0, \quad (4.12)$$

односно, у складу са Понтрјагиновом функцијом (4.8), пишемо

$$\lambda_0 + \lambda_i u^i = 0. \quad (4.13)$$

На основу (4.1), (4.2), (4.5), (4.11) и (4.13), одређен је Лагранжев множитељ μ

$$\mu(\mathbf{q}) = -\frac{\lambda_0}{2[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]}. \quad (4.14)$$

На основу (4.11) и (4.14), одређена су екстремална управљања u^i у следећем облику

$$u^i(\mathbf{q}, \lambda) = -\frac{2[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]}{\lambda_0} a^{ij}(\mathbf{q}) \lambda_j, \quad (4.15)$$

где су $a^{ij} = a^{ij}(\mathbf{q})$ координате контраваријантног метричког тензора. Међу екстремалним управљањима (4.15) треба тражити оптимална. Сада, на основу (4.6), (4.9), (4.14) и (4.15), можемо формирати основни и спрегнути систем диференцијалних једначина првог реда у нормалном облику

$$\dot{q}^i = -\frac{2[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]}{\lambda_0} a^{ij}(\mathbf{q}) \lambda_j, \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i &= -\frac{\lambda_0}{2[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]} \frac{\partial \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{u})}{\partial q^i} \\ &= -\frac{[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]}{\lambda_0} \frac{\partial a^{jk}(\mathbf{q})}{\partial q^i} \lambda_j \lambda_k - \frac{\lambda_0}{2[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]} \frac{\partial \Pi(\mathbf{q})}{\partial q^i}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Општа решења система једначина (4.16) и (4.17) садрже $2n$ непознатих интеграционих константи које је неопходно одредити. Имајући у виду да је почетни положај, одређен генерализаним координатама (4.3), као и крајњи положај система на многострукости (4.4) одређен, неопходно је обезбедити још $n - m$ услова. Услови трансверзалности у почетном тренутку су идентички задовољени, имајући у виду да је почетни положај система у потпуности одређен. Многострукост (4.4) представља пресек m хиперповрши за које ћемо претпоставити да су глатке, тј. нека је

$$\text{rank} \left[\frac{\partial \Psi_k}{\partial q_f^i} \right] = m, \quad (4.18)$$

где је $\left[\frac{\partial \Psi_k}{\partial q_f^i} \right] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Јакобијева матрица ограничења [Lurie, 2002; Papastavridis, 2002], тада многострукост (4.4) у свакој тачки q_f^i има јединствену тангентну раван у којој лежи вектор варијације $(\Delta q_f^1, \dots, \Delta q_f^n)$. Према томе је

$$\frac{\partial \Psi_k}{\partial q_f^i} \Delta q_f^i = 0, \quad (4.19)$$

где $\Delta(\cdot)$ представља асинхрону варијацију [Elsgolc, 1963; Gelfand, Fomin, 1964] величине (\cdot) . Из услова ортогоналности спрегнутог вектора и вектора варијације у крајњем тренутку на многострукости (4.4), добија се

$$\lambda_{if} \Delta q_f^i = 0, \quad (4.20)$$

где су $\lambda_{if} = \lambda_i(t_f)$. У првом кораку, из релације (4.19), под условом да важи (4.18), можемо изразити m зависних координата вектора варијације у функцији од $n - m$ независних координата вектора варијације. У другом кораку, елиминацијом зависних координата вектора варијације из (4.20), након увршћавања зависних координата вектора варијације добијених у првом кораку, и изједначавањем са нулом коефицијенте уз независне координате вектора варијације, добија се преосталих $n - m$ неопходних услова, који се могу написати у следећем облику

$$\Psi_l^*(q_f, \lambda_f) = 0. \quad (4.21)$$

Услови (4.21) представљају услове трансверзалности у крајњем тренутку, и еквивалентни су једначинама (4.19) и (4.20).

4.2 Одређивање интервала вредности непознатих координата спрегнутог вектора у почетном тренутку

На основу првог интеграла (4.13) одређеног у почетном тренутку $t_0 = 0$, имајући у виду притом (4.15), добија се следећа позитивно дефинитна квадратна форма

$$a_0^{ij} \lambda_{i0} \lambda_{j0} = \frac{\lambda_0^2}{2(E_0 - \Pi_0)} = \text{const.}, \quad (4.22)$$

где су $\lambda_{i0} = \lambda_i(t_0)$, $a_0^{ij} = a^{ij}(\mathbf{q}_0)$, $\mathbf{q}_0 = (q_0^1, \dots, q_0^n)$ и $\Pi_0 = \Pi(\mathbf{q}_0)$. Уколико је $\lambda_0 = 0$, из (4.14), (4.17) и (4.22) следи да су $\mu(t) \equiv 0$ и $\lambda_i(t) \equiv 0$, односно све координате спрегнутог вектора су идентички једнаке нули. Неопходни услови оптималности, одређени Теоремом 1 [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962], за $\lambda_0 = 0$ нису задовољени, с обзиром да је спрегнути вектор за $\lambda_0 = 0$ нула вектор, што је у супротности са принципом максимума. У циљу свођења квадратне форме (4.22) на канонски облик [Strang, 1988], уводи се хомогена линеарна трансформација координата спрегнутог вектора у облику

$$\lambda_i = c_i^j \lambda_j^*, \quad (4.23)$$

под условом да је $\det[c_i^j] \neq 0$ [Strang, 1988], где је $[c_i^j] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ортогонална матрица трансформације. Сада се позитивно дефинитна квадратна форма (4.22), након увођења линеарне трансформације (4.23), своди на канонски облик

$$a_0^{11*} (\lambda_{10}^*)^2 + a_0^{22*} (\lambda_{20}^*)^2 + \dots + a_0^{nn*} (\lambda_{n0}^*)^2 = \frac{\lambda_0^2}{2(E_0 - \Pi_0)} = \text{const.}, \quad (4.24)$$

где су $a_0^{ij*} = a_0^{rs} c_r^i c_s^j$ сопствене вредности матрице контраваријантног метричког тензора $[a_0^{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ одређеног у почетном тренутку. Глобалне процене интервала вредности координата λ_{i0}^* , могу се одредити на основу канонске форме (4.24) у следећем облику

$$-\sqrt{\frac{\lambda_0^2}{2(E_0 - \Pi_0) a_0^{ii*}}} \leq \lambda_{i0}^* \leq \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{2(E_0 - \Pi_0) a_0^{ii*}}}. \quad (4.25)$$

Основни систем (4.16) и спрегнути систем (4.17) диференцијалних једначина, након увођења линеарне трансформације (4.23), добија сада следећи облик

$$\dot{q}^i = -\frac{2[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]}{\lambda_0} a^{ij}(\mathbf{q}) c_j^r \lambda_r^*, \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_i^* &= -\frac{\lambda_0}{2[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]} \frac{\partial \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{u})}{\partial q^j} d_i^j \\ &= -\frac{[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]}{\lambda_0} \frac{\partial a^{kr}(\mathbf{q})}{\partial q^j} d_i^j c_k^s c_r^t \lambda_s^* \lambda_t^* - \frac{\lambda_0}{2[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]} \frac{\partial \Pi(\mathbf{q})}{\partial q^j} d_i^j,\end{aligned}\quad (4.27)$$

где су $c_r^j d_i^r = \delta_i^j$. Ако се има у виду да се једна од координата спрегнутог вектора у почетном тренутку, рецимо λ_{i0}^* , може изразити из канонске форме (4.24) у функцији од преостале $(n-1)$ -не координате у следећем облику

$$\lambda_{i0}^* = \pm \sqrt{\frac{m\lambda_0^2}{2(E_0 - \Pi_0)} - \left[(\lambda_{20}^*)^2 + (\lambda_{30}^*)^2 + \dots + (\lambda_{n0}^*)^2 \right]}, \quad (4.28)$$

као и да је крајњи тренутак t_f непознат, број непознатих граничних услова који се одређују, применом поменутих нумеричких алгоритама, једнак је броју DOF кретања разматраног холономног склерономног механичког система. За механичке системе до 3 DOF кретања, решења TPBVP могу бити геометријски представљена у простору \mathbb{R}^3 , као што је то показано у Поглављу 3. На основу процена (4.25) координата λ_{i0}^* спрегнутог вектора, док је $t_f \geq 0$, може се такође тврдити да се сва решења одговарајућег TPBVP сигурно налазе унутар датих интервала, а самим тим и глобални минимум времена при брахистохроном кретању холономног механичког система. У случају вишеструких решења принципа максимума, глобални минимум је оно решење које одговара минималном времену. С обзиром да је крајњи циљ одредити оно решење TPBVP које одговара минималном времену, одредићемо решења TPBVP у интервалу крајњег тренутка

$$0 \leq t_f \leq t_f^*, \quad (4.29)$$

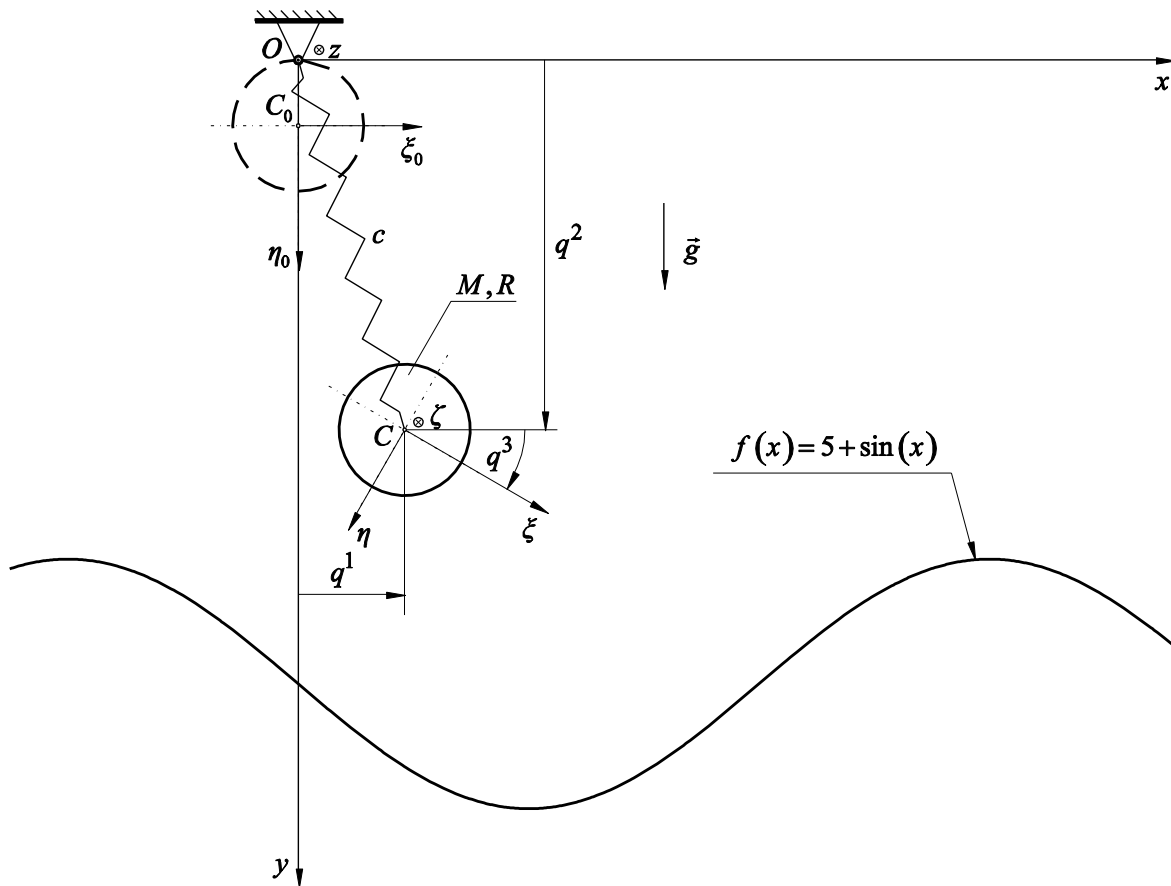
где је t_f^* дата позитивна константа. Следеће функционалне релације у нумеричком облику сада могу бити успостављене

$$\Gamma(z) = \left[\Psi_1(\mathbf{q}_f), \dots, \Psi_m(\mathbf{q}_f), \Psi_{m+1}^*(\mathbf{q}_f, \boldsymbol{\lambda}_f), \dots, \Psi_n^*(\mathbf{q}_f, \boldsymbol{\lambda}_f) \right]^T = \mathbf{0}_{n \times 1}, \quad (4.30)$$

где су $\Gamma(z) \equiv [\Gamma_1(z), \dots, \Gamma_n(z)]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ шутинг функција [Jiang, Baoyin, Li, 2012] и $z = [\lambda_{20}, \dots, \lambda_{n0}, t_f]$.

4.3 Нумерички пример 1

Разматра се кретање кружног диска, полупречника R и масе M , у вертикалној равни у хомогеном гравитационом пољу силе Земљине теже. Опруга крутости c и слободне дужине $l_0 = R$ везана је једним крајем за непокретну тачку O (видети слику 4.1), док је другим крајем везана за центар маса C диска. Координатни почетак непокретног координатног система $Oxyz$ постављен је у тачки O , док се координатна равна Oxy поклапа са вертикалном равни кретања диска, где је оса Oy усмерена вертикално наниже. Осе покретног координатног система $C\xi\epsilon\delta$, који је круто везан за диск са координатним почетком у центру маса C диска, у почетном тренутку $t_0 = 0$ биле су паралелне осама непокретног координатног система. Кофигурација диска у односу на систем $Oxyz$ дефинисана је скупом Лагранжевих координата $\mathbf{q} = (q^1, q^2, q^3)^T$, где су $q^1 = x_C$ и $q^2 = y_C$ координате центра маса C диска, док је $q^3 = \varphi$ угао обртања диска.



Слика 4.1 Кретање диска у вертикалној равни Oxy

Кинетичка енергија диска је

$$T = \frac{1}{2} M \left[(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 + \frac{1}{2} R^2 (\dot{q}^3)^2 \right], \quad (4.31)$$

док је потенцијална енергија диска одређена следећим изразом

$$\Pi = -Mgq^2 + \frac{1}{2} c \left(\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2} - R \right)^2, \quad (4.32)$$

где је $\vec{g} = -g\vec{j}$ и $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ убрзање силе Земљине теже. Почетни положај (4.3), као и крајњи положај диска на многострукости (4.4), одређени су респективно

$$t_0 = 0, \quad q_0^1 = 0, \quad q_0^2 = R, \quad q_0^3 = 0, \quad (4.33)$$

$$t = t_f, \quad \Psi_1 = q_f^2 - a \left(5 + \sin \left(\frac{q_f^1}{a} \right) \right) = 0, \quad \Psi_2 = q_f^3 - 2\pi = 0, \quad (4.34)$$

где је $a = 1\text{m}$. Према (4.34) значи да се, у крајњем тренутку t_f , центар маса C диска мора налазити на кривој $f(x) = a(5 + \sin(x/a))$. Релација ограничења (4.5), у складу са (4.31) и (4.32), има следећи облик

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = & \frac{1}{2} M \left[(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 + \frac{1}{2} R^2 (\dot{q}^3)^2 \right] - M g q^2 \\ & + \frac{1}{2} c \left(\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2} - R \right)^2 - E_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Квадратна форма (4.22) за $\lambda_0 = -1$ [Leitmann, 1981; Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962], у складу са (4.31), (4.32) и (4.33), има следећи облик

$$\frac{1}{M} \lambda_{10}^2 + \frac{1}{M} \lambda_{20}^2 + \frac{2}{MR^2} \lambda_{30}^2 = \frac{1}{2(E_0 + M g q_0^2)}, \quad (4.36)$$

где је $\Pi_0 = -M g q_0^2$ потенцијална енергија диска у почетном тренутку. Како квадратна форма (4.36) има канонски облик, није потребно извршити линеарну трансформацију координата спрегнутог вектора, односно $\lambda_i = \lambda_i^*$. Као што је речено, једна од координата спрегнутог вектора из (4.36) може се изразити у функцији од преосталих

$$\lambda_{20} = \pm \sqrt{\frac{M}{2 \left[E_0 + M g q_0^2 - \frac{1}{2} c \left(\sqrt{(q_0^1)^2 + (q_0^2)^2} - R \right)^2 \right]} - \left(\lambda_{10}^2 + \frac{2}{R^2} \lambda_{30}^2 \right)}, \quad (4.37)$$

док услов трансверзалности (4.21) у крајњем тренутку има следећи облик

$$\Psi_3^* = \lambda_{1f} + \lambda_{2f} \cos \left(\frac{q_f^1}{a} \right) = 0. \quad (4.38)$$

Коначно, ТРВРР одређен је диференцијалним једначинама првог реда у нормалном облику

$$\begin{aligned}
\dot{q}^1 &= -\frac{2 \left[E_0 + Mgq^2 - \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2} - R \right)^2 \right]}{M} \lambda_1, \\
\dot{q}^2 &= -\frac{2 \left[E_0 + Mgq^2 - \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2} - R \right)^2 \right]}{M} \lambda_2, \\
\dot{q}^3 &= -\frac{4 \left[E_0 + Mgq^2 - \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2} - R \right)^2 \right]}{MR^2} \lambda_3,
\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1 &= \frac{c}{2 \left[E_0 + Mgq^2 - \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2} - R \right)^2 \right]} \frac{\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2} - R}{\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2}} q^1, \\
\dot{\lambda}_2 &= \frac{1}{2 \left[E_0 + Mgq^2 - \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2} - R \right)^2 \right]} \left(\frac{\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2} - R}{\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2}} cq^2 - Mg \right), \\
\dot{\lambda}_3 &= 0,
\end{aligned} \tag{4.40}$$

где је $\mathbf{u} = (\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3)^T$ вектор управљања, као и граничним условима (4.33), (4.34) и (4.38). Тропараметарски шутинг састоји се у одређивању непознатих координата $\lambda_{10}, \lambda_{30}$ спрегнутог вектора у почетном тренутку, као и минимално потребног времена t_f . Глобалне процене интервала вредности координата $\lambda_{10}, \lambda_{20}$ и λ_{30} могу се одредити на основу канонске форме (4.36)

$$\begin{aligned}
-\sqrt{\frac{M}{2(E_0 + Mgq_0^2)}} &\leq \lambda_{10} \leq \sqrt{\frac{M}{2(E_0 + Mgq_0^2)}}, \\
-\sqrt{\frac{M}{2(E_0 + Mgq_0^2)}} &\leq \lambda_{20} \leq \sqrt{\frac{M}{2(E_0 + Mgq_0^2)}}, \\
-\sqrt{\frac{MR^2}{4(E_0 + Mgq_0^2)}} &\leq \lambda_{30} \leq \sqrt{\frac{MR^2}{4(E_0 + Mgq_0^2)}},
\end{aligned} \tag{4.41}$$

док ћемо решења разматраног TPBVP одредити у интервалу крајњег тренутка

$$0 \leq t_f \leq 0,195s. \tag{4.42}$$

Функционалне релације (4.30), у складу са (4.34) и (4.38), сада могу бити успостављене у нумеричком облику

$$\Gamma_1(\lambda_{10}, \lambda_{30}, t_f) = \Psi_1 = 0, \quad \Gamma_2(\lambda_{10}, \lambda_{30}, t_f) = \Psi_2 = 0, \quad \Gamma_3(\lambda_{10}, \lambda_{30}, t_f) = \Psi_3^* = 0. \tag{4.43}$$

Сада је могуће, у простору $(\lambda_{10}, \lambda_{30}, t_f)$, одредити пресек површи (4.43) као

$$p_f = \Gamma_1(\lambda_{10}, \lambda_{30}, t_f) \cap \Gamma_3(\lambda_{10}, \lambda_{30}, t_f), \quad r_f = \Gamma_2(\lambda_{10}, \lambda_{30}, t_f) \cap \Gamma_3(\lambda_{10}, \lambda_{30}, t_f), \tag{4.44}$$

где су p_f и r_f просторне линије представљене следећим функционалним зависностима у нумеричком облику

$$p_f = f_p(\lambda_{10}, t_f), \quad r_f = f_r(\lambda_{10}, t_f). \tag{4.45}$$

Решења TPBVP геометријски су представљена тачкама добијеним пресеком просторних линија (4.45), у простору $(\lambda_{10}, \lambda_{30}, t_f)$, као

$$f_p(\lambda_{10}, t_f) \cap f_r(\lambda_{10}, t_f) = \{M_1, \dots, M_r\}. \tag{4.46}$$

Решења TPBVP одредићемо за следеће вредности параметара

$$\begin{aligned}
E_0 &= 3500 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}, \quad M = 3\text{kg}, \quad R = 0,2\text{m}, \quad c = 0,2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \\
q_0^2 &= 0,2\text{m}, \quad q_f^3 = 2\pi \text{rad}, \quad g = 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

На основу (4.41) и (4.47), можемо одредити глобалне процене интервала вредности координата $\lambda_{10}, \lambda_{20}$ и λ_{30} спрегнутог вектора у почетном тренутку

$$-0,0207 \leq \lambda_{10} \leq 0,0207, \quad -0,0207 \leq \lambda_{20} \leq 0,0207, \quad -0,0029 \leq \lambda_{30} \leq 0,0029. \quad (4.48)$$

На слици 4.2 приказане су просторне линије p_f и r_f , као и пресечне тачке

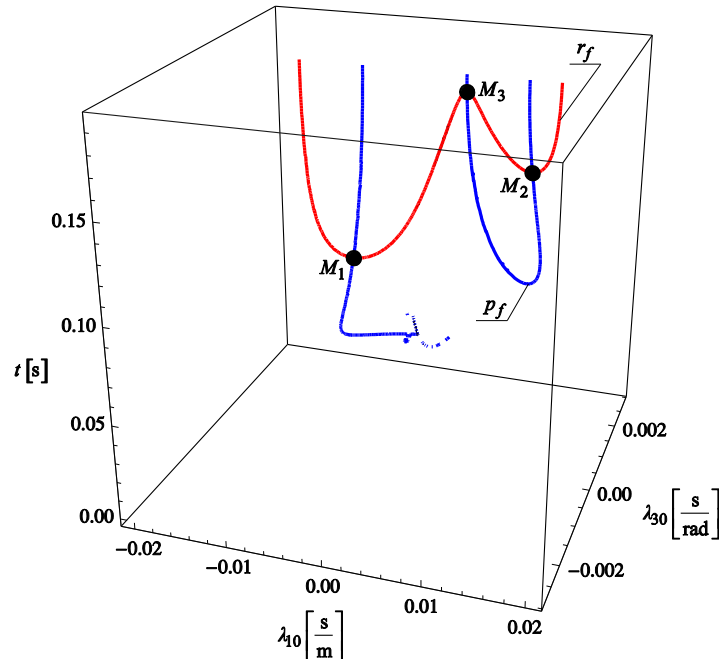
$M_i (i=1,2,3)$ просторних линија за

$$\lambda_{20} = \sqrt{\frac{M}{2 \left[E_0 + Mgq_0^2 - \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q_0^1)^2 + (q_0^2)^2} - R \right)^2 \right]} - \left(\lambda_{10}^2 + \frac{2}{R^2} \lambda_{30}^2 \right)},$$

док решења ТРВР за

$$\lambda_{20} = -\sqrt{\frac{M}{2 \left[E_0 + Mgq_0^2 - \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q_0^1)^2 + (q_0^2)^2} - R \right)^2 \right]} - \left(\lambda_{10}^2 + \frac{2}{R^2} \lambda_{30}^2 \right)}$$

не постоје. Са слике 1 евидентно је да ТРВР нема јединствено решење.



Слика 4.2 Пресек просторних линија $p_f = f_p(\lambda_{10}, t_f)$ и $r_f = f_r(\lambda_{10}, t_f)$; пресечне тачке $M_i (i=1,2,3)$ просторних линија

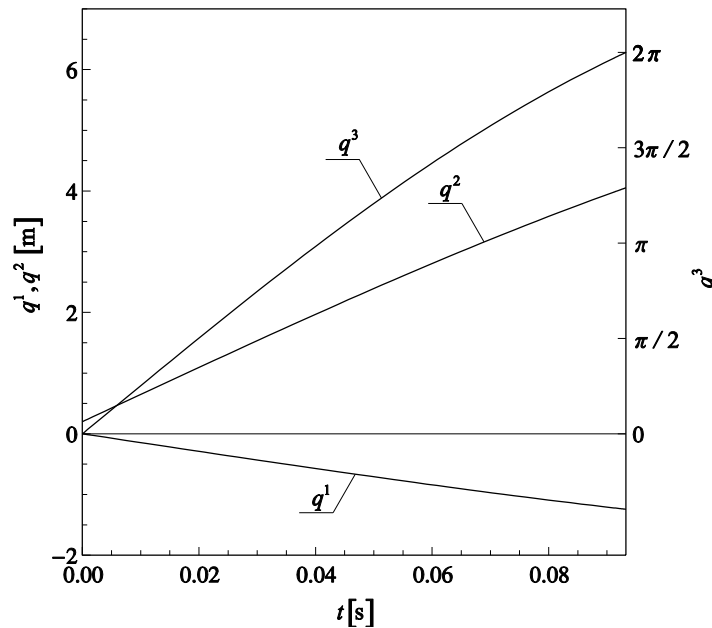
У табели 4.1 приказана су решења ТРВVP.

Табела 4.1 Нумеричка решења ТРВVP

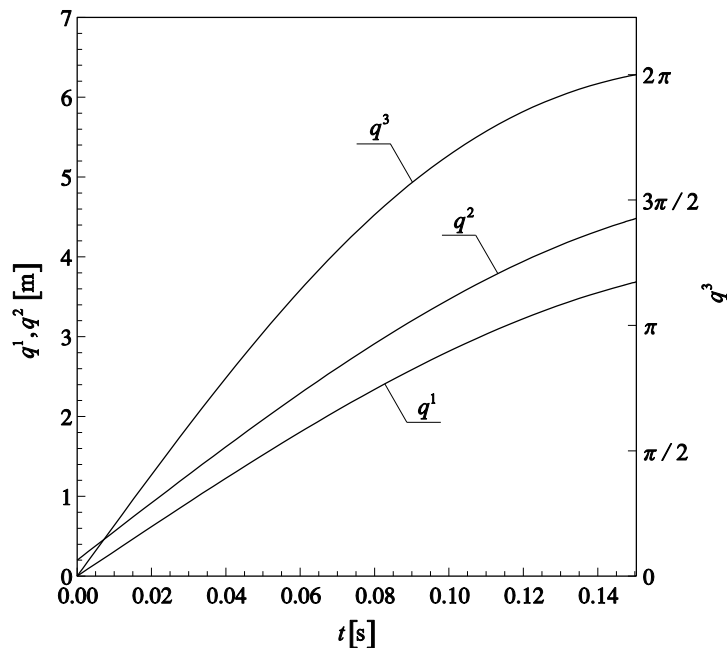
Решења	λ_{10} [s/m]	λ_{30} [s/rad]	t_f [s]
Прво решење (M_1)	-0,006182	0,000677	0,09326
Друго решење (M_2)	0,013277	0,000545	0,150368
Треће решење (M_3)	0,006419	0,000534	0,187075

На основу добијених решења ТРВVP приказаних у табели 4.1, може се закључити да глобални минимум времена при брахистохроном кретању диска у вертикалној равни одговара првом решењу (тачка M_1 приказана на слици 4.2) и износи $t_f = 0,09326$ s.

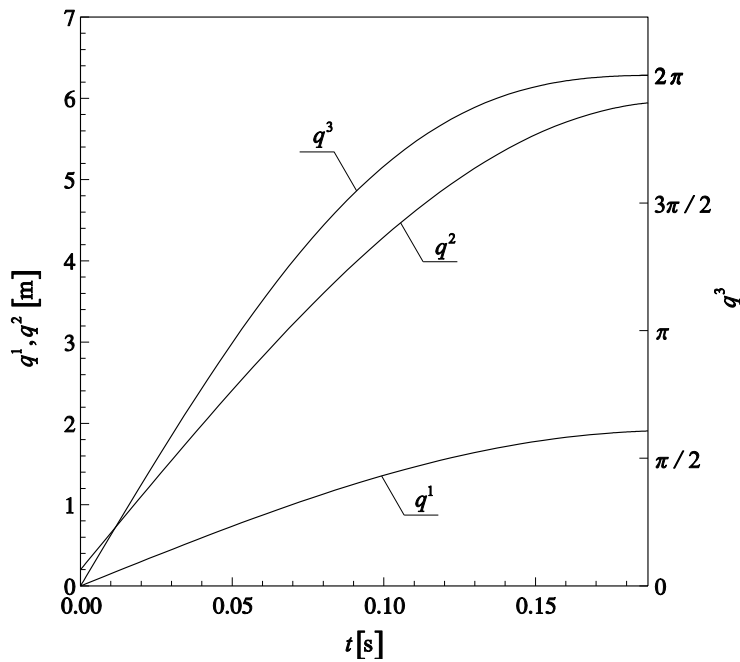
На сликама 4.3–4.5 приказани су закони промене генерализаних координата $q^i = q^i(t)$ ($i=1,2,3$) које одговарају респективно решењима M_i ($i=1,2,3$), док су на слици 4.6 приказани закони промене оптималних управљања $u^i = u^i(t)$ ($i=1,2,3$).



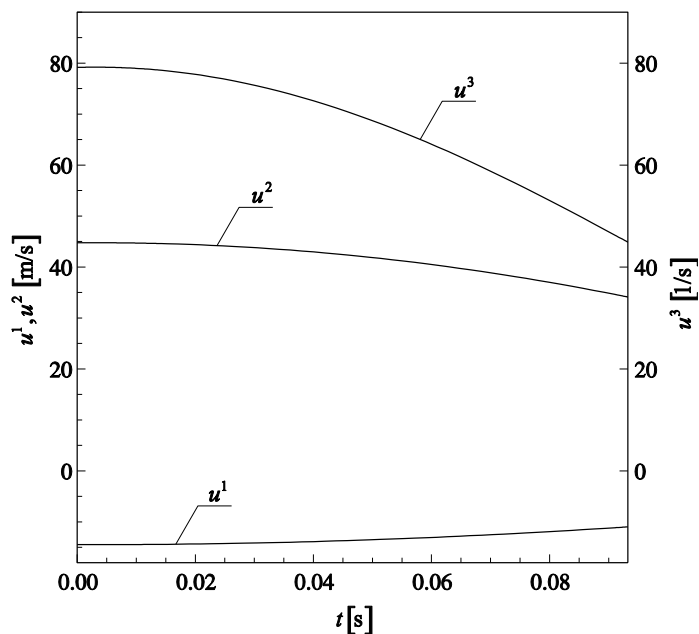
Слика 4.3 Генерализане координате $q^i = q^i(t)$ ($i=1,2,3$) које одговарају првом решењу (M_1)



Слика 4.4 Генерализане координате $q^i = q^i(t)$ ($i=1,2,3$) које одговарају другом решењу (M_2)



Слика 4.5 Генерализане координате $q^i = q^i(t)$ ($i=1,2,3$) које одговарају трећем решењу (M_3)



Слика 4.6 Оптимална управљања $u^i = u^i(t)$ ($i=1,2,3$) која одговарају првом решењу (M_1)

Реализација брахистохроног кретања механичког система уопштено се може остварити управљачким силама, чија је укупна снага током брахистохроног кретања једнака нули, које могу бити представљене у облику активних управљачких сила (видети нпр. [Antunes, Sigaud, 2010; Čović, Vesković, 2009; Šalinić, Obradović, Mitrović, 2012]), силама реакција веза, или њиховом међусобном комбинацијом. Реализација брахистохроног кретања без дејста активних управљачких сила може се остварити накнадним наметањем систему s холономних идеалних стационарних механичких веза (видети нпр. [Obradović, Šalinić, Jeremić, 2014; Šalinić, Obradović, Mitrović, 2013]), што је најближе изворној Бернулијевој идеји, где ће реакције накнадно наметнутих механичких веза заменити дејство активних управљачких сила, у складу са претходно одређеним брахистохроним кретањем. Наиме, нека су једначине накнадно наметнутих механичких веза следећег облика

$$\varphi^s(\mathbf{q}) = 0, \quad s = \overline{1, n-1}, \quad (4.49)$$

где је

$$\text{rank} \left[\frac{\partial \varphi^s}{\partial q^i} \right] = n - 1. \quad (4.50)$$

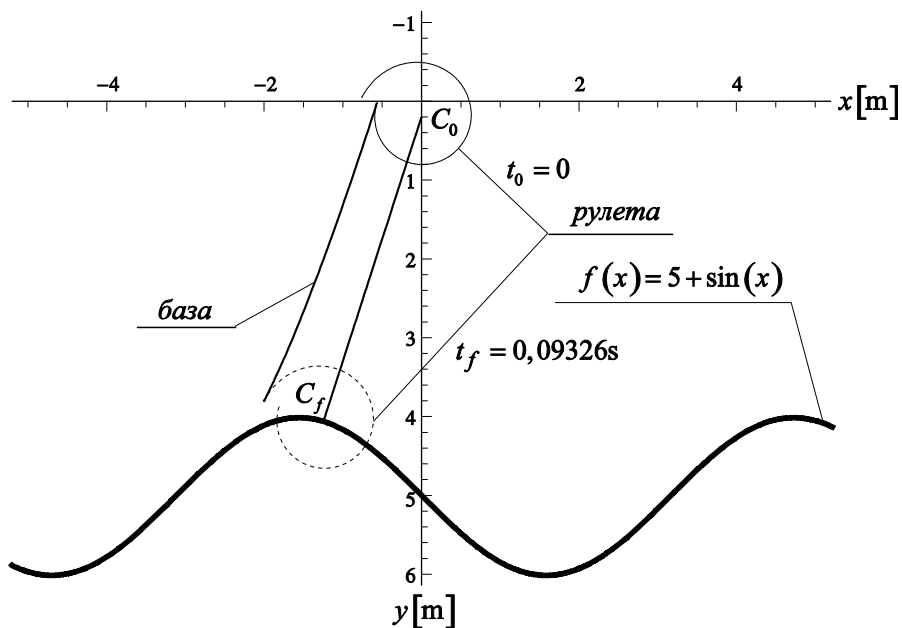
Свако кретање равне фигуре може се представити котрљањем без клизања покретне центроиде (рулете) по непокретној центроиди (бази), угаоном брзином једнакој угаоној брзини равне фигуре [Mladenović, 2008; Yablonskii, Nikiforova, 1966; Scheiber, Lupu, 1997; Zyrman, 2007]. Под непокретном центроидом подразумева се геометријско место тренутних центара обртања у односу на непокретну раван, док се под покретном центроидом подразумева геометријско место тренутних положаја брзина у односу на раван фигуре [Mladenović, 2008]. Иако се у сваком тренутку тренутни пол брзина поклапа са тренутним центром ротације, треба имати у виду да је тренутни пол брзина тачка која припада равној фигури, док је тренутни центар ротације тачка непокретне равни [Mladenović, 2008]. Брахистохроно кретање диска, који се креће у вертикалној равни Oxy , биће реализовано котрљањем рулете по бази угаоном брзином једнакој угаоној брзини диска [Mladenović, 2008; Yablonskii, Nikiforova, 1966; Scheiber, Lupu, 1997; Zyrman, 2007]. Параметарске једначине непокретне центроиде су [Mladenović, 2008; Yablonskii, Nikiforova, 1966; Scheiber, Lupu, 1997; Zyrman, 2007]

$$x = q^1 - \frac{\dot{q}^2}{\dot{q}^3}, \quad y = q^2 + \frac{\dot{q}^1}{\dot{q}^3}, \quad (4.51)$$

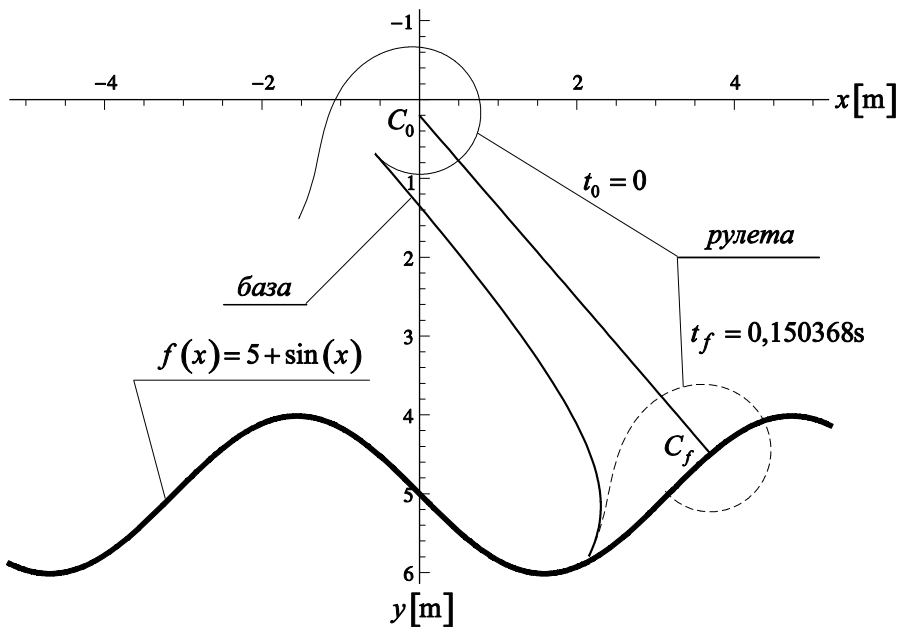
док су параметарске једначине покретне центроиде дате у следећем облику [Mladenović, 2008; Yablonskii, Nikiforova, 1966; Scheiber, Lupu, 1997; Zyrman, 2007]

$$\xi = \frac{1}{\dot{q}^3} (\dot{q}^1 \sin q^3 - \dot{q}^2 \cos q^3), \quad \varepsilon = \frac{1}{\dot{q}^3} (\dot{q}^1 \cos q^3 + \dot{q}^2 \sin q^3). \quad (4.52)$$

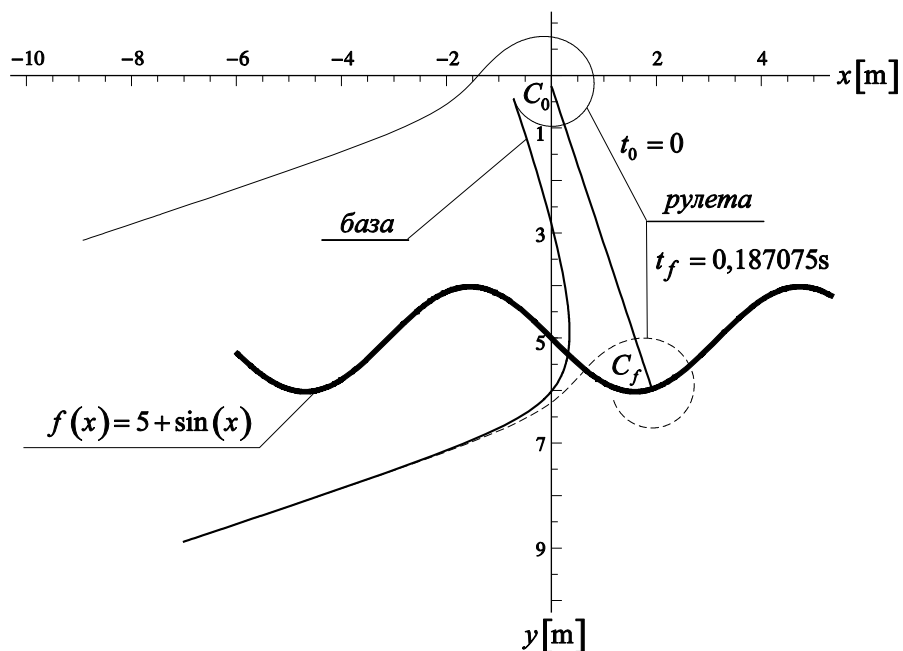
Непокретна и покретне центроиде, за положај диска одређен како почетним $t_0 = 0$, тако и крајњим тренутком $t = t_f$, као и трајекторија центра маса C диска, приказани су на сликама 4.7–4.9.



Слика 4.7 Центроиде и трајекторија центра маса C диска које одговарају првом решењу (M_1)



Слика 4.8 Центроиде и трајекторија центра маса C диска које одговарају другом решењу (M_2)



Слика 4.9 Центроиде и трајекторија центра маса C диска које одговарају трећем решењу (M_3)

Иако се решења TPBVP могу одредити користећи претходно описан нумерички поступак, у наставку биће разматрани различити, већ постојећи, нумерички алгоритми за глобалну оптимизацију, у циљу изналажења оптималних вредности параметара који утичу на тачност и брзину конвергенције решења. У оквиру програмског окружења *Wolfram Mathematica* постоје уграђени нумерички алгоритми за глобалну оптимизацију. На располагању су следећи нумерички алгоритми: *Differential Evolution*, *Nelder Mead*³⁸, *Random Search* и *Simulated Annealing*. Нумерички алгоритми за нелинеарну оптимизацију, начелно се могу поделити у две групе, и то:

- нумерички алгоритми засновани на градијентним методама,
- нумерички алгоритми засновани на директним методама претраге.

Непознати параметри који се одређују применом претходно наведених нумеричких алгоритама, могу, у општем случају, бити подвргнути различитим типовима ограничења. Посебна пажња биће посвећена управо нумеричким алгоритмима

³⁸ *Nelder Mead* је заправо нумерички алгоритам за локалну оптимизацију.

заснованим на директним методама претраге, који спорије конвергирају у односу на нумеричке алгоритме засноване на градијентним методама, али су са друге стране знатно толерантнији на присуство ограничења непознатих параметара који се одређују. Оно што је овде битно напоменути је да ми не одређујемо најбоље могуће решење TPBVP, већ сва могућа решења TPBVP у унапред задатом интервалу крајњег тренутка, која су у нумеричком смислу подједнако добра. У том смислу, с обзиром да нисмо у могућности да одредимо сва могућа решења разматраног TPBVP директном применом неког од нумеричких алгоритама за глобалну оптимизацију, предлагемо следећи приступ. За унапред задату вредност крајњег тренутка $t_{if} = ih (i = \overline{0, n})$, $n \in \mathbb{N}$, где је h корак који може бити константан или променљив, имајући у виду притом ограничења (4.25), одређује се минимизација шутинг функције (4.30) (функције грешке³⁹), односно, одређују се непознате координате спрегнутог вектора у почетном тренутку при којима је функција грешке минимална. Минимизација функције грешке, за механичке системе са произвољним бројем DOF кретања, може бити одређена у програмском окружењу *Wolfram Mathematica* на следећи начин

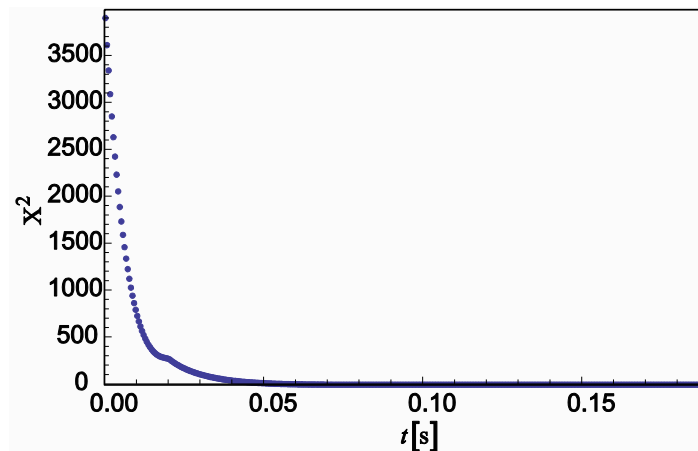
³⁹ Иако се под функцијим грешке (такође позната и као Гаусова (*Johann Carl Friedrich Gauss*, 1777-1855) функција грешке) подразумева $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, уобичајено је такође да се и сама шутинг функција назива функција грешке.

$$\begin{aligned}
& \Psi \left[\lambda_{20}^*, \dots, \lambda_{n0}^* \right] := \text{Norm} \left[\left\{ \Gamma_1 \left[\lambda_{20}^*, \dots, \lambda_{n0}^* \right], \dots, \Gamma_n \left[\lambda_{20}^*, \dots, \lambda_{n0}^* \right] \right\} \right]; \\
& \text{For} \left[i = 0, \quad i \leq n, \quad i ++, \right. \\
& \quad t_{if} = ih; \\
& \quad X_i = \text{NMinimize} \left[\left\{ \Psi \left[\lambda_{20}^*, \dots, \lambda_{n0}^* \right], \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. - \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{2(E_0 - \Pi_0) a_0^{22*}}} \leq \lambda_{20}^* \leq \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{2(E_0 - \Pi_0) a_0^{22*}}} \ \& \ \& \dots \right. \right. \quad (4.53) \\
& \quad \quad \left. \left. \& \ \& - \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{2(E_0 - \Pi_0) a_0^{nm*}}} \leq \lambda_{n0}^* \leq \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{2(E_0 - \Pi_0) a_0^{nm*}}} \right\}, \left\{ \lambda_{20}^*, \dots, \lambda_{n0}^* \right\}, \right. \\
& \quad \text{Method} \rightarrow \{ \dots \}, \text{MaxIterations} \rightarrow c_1, \text{AccuracyGoal} \rightarrow c_2, \text{PrecisionGoal} \rightarrow c_3 \left. \right] \\
& \quad \left. \right];
\end{aligned}$$

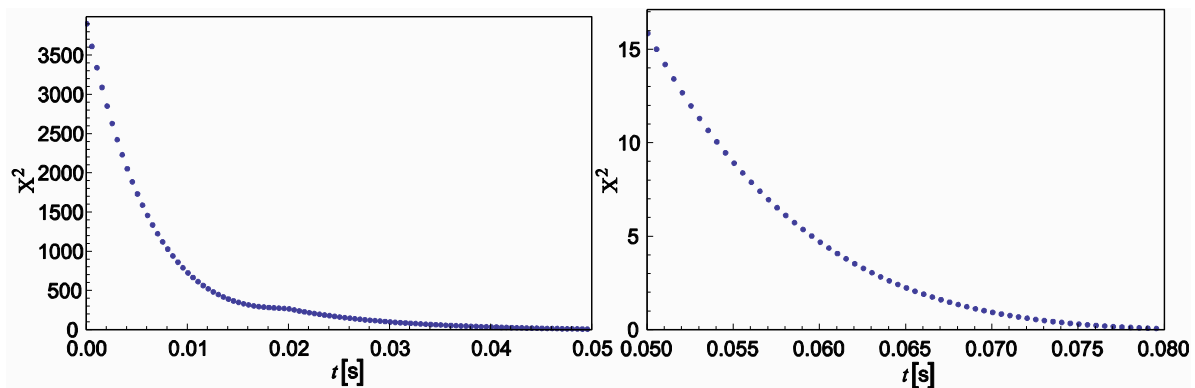
где је c_1 максималан број итерација, док су c_2 и c_3 коефицијенти којима одређујемо критеријум конвергенције $\|x_k - x^*\| \leq \max(10^{-c_2}, 10^{-c_3} \|x_k\|)$ и $\nabla f(x_k) \leq 10^{-c_2}$, односно број сигурних цифара коначног решења. Сада, функцију грешке можемо графички представити тачкама (t_{if}, X_i) , применом неког од нумеричких алгоритама за глобалну оптимизацију. У оквиру уграђене функције `NMinimize[...]` неопходно је одабрати један од претходно наведених нумеричких алгоритама који се користи у процесу минимизације функције грешке. Избор оптималних вредности параметара, за сваки од претходно наведених нумеричких алгоритама, који утичу на тачност и брзину конвергенције решења, свакако зависе од примера до примера, али се могу, као почетне, користити оне вредности дате, на пример, у радовима [Mallipeddi, Suganthan, Pan, Tasgetiren, 2011; Feoktistov, 2006; Qin, Huang, Suganthan, 2009; Song, Wang, Li, 2015].

На основу детаљно спроведене анализе која се односи на избор методе, као и избор оптималних вредности параметара у оквиру разматраних метода, дошли смо до закључка да је метода *Differential Evolution* најповољнија са аспекта тачности и брзине конвергенције.

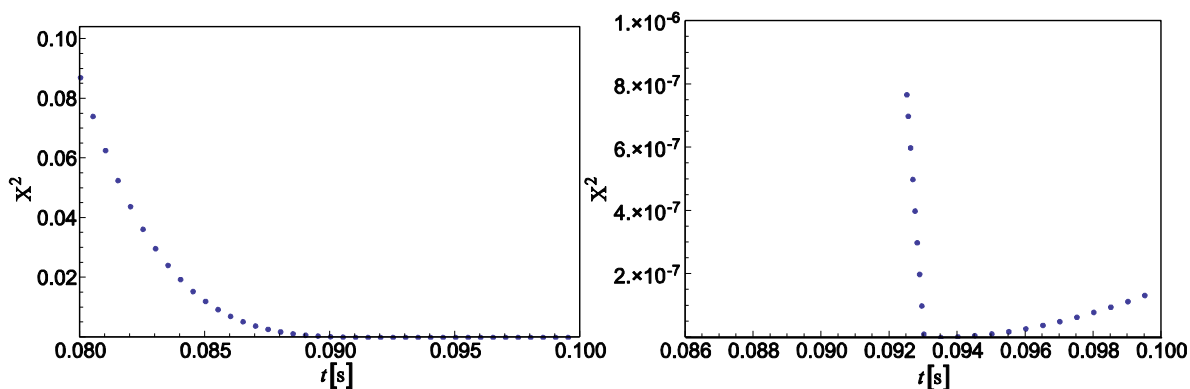
У наставку су дати графички прикази функције грешке одређене тачкама (t_{if}, X_i) , применом методе *Differential Evolution* при вредности параметра "ScalingFactor" \rightarrow 0.5. У разматраном примеру корак је $h = 0,0005$, док су $n = 380, c_1 = 1500, c_2 = 9$ и $c_3 = 8$.



Слика 4.10 Функција грешке одређена тачкама (t_{if}, X_i) , применом методе *Differential Evolution* у интервалу $0 \leq t \leq 0,19s$

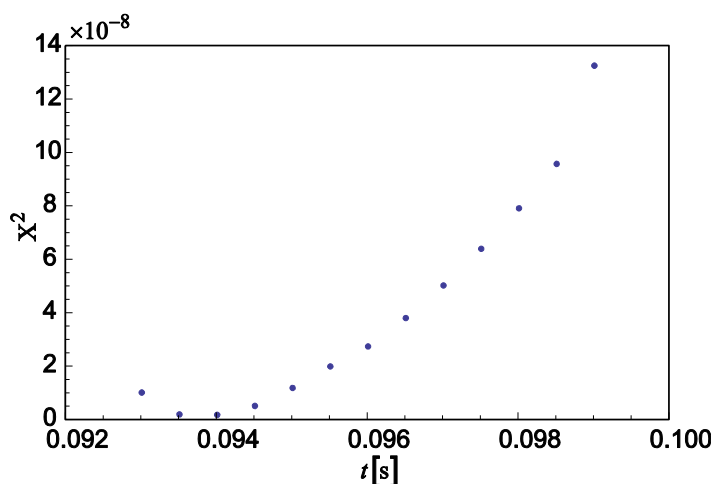


Слика 4.11 Функција грешке одређена тачкама (t_{if}, X_i) , применом методе *Differential Evolution* у интервалу $0 \leq t \leq 0,08s$



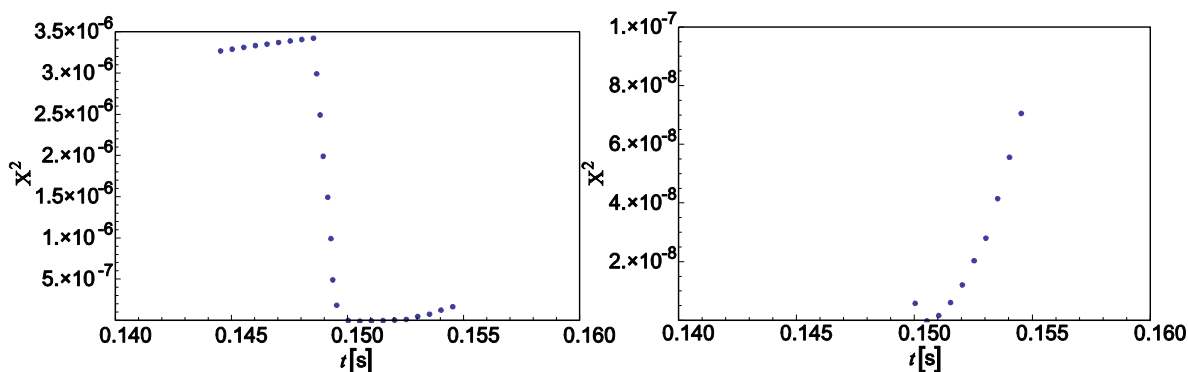
Слика 4.12 Функција грешке одређена тачкама (t_{if}, X_i) , применом методе *Differential Evolution* у интервалу $0,08 \leq t \leq 0,1s$

Јасно се са слика 4.10–4.12 може видети да не постоје решења разматраног ТРВРР у интервалу $0 \leq t \leq 0,093s$, што уједно представља главни циљ овог разматрања.



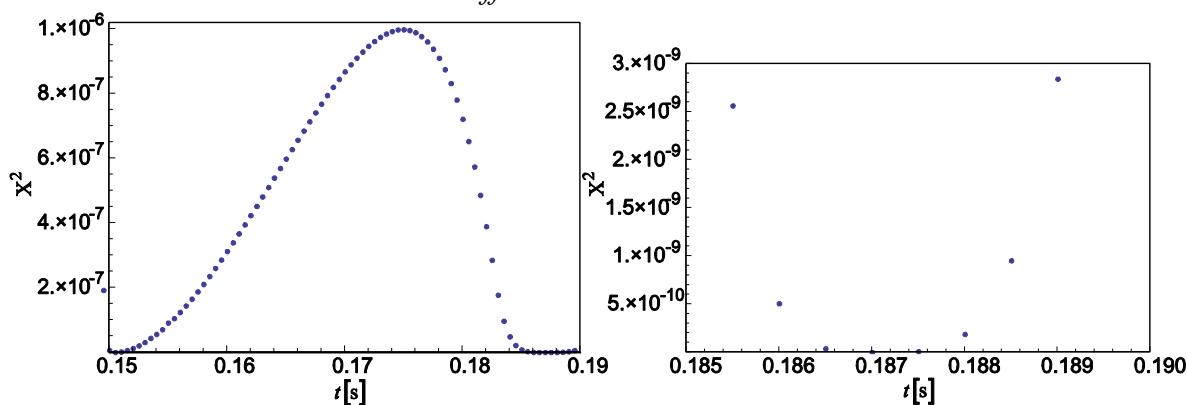
Слика 4.13 Глобални минимум времена кретања ($t_f = 0,09326s$) одређен применом методе *Differential Evolution*

Такође, са слике 4.13 евидентно је да глобални минимум времена при брахистохроном кретању диска у вертикалној равни управо одговара првом решењу приказаног у табели 4.1 и износи $t_f = 0,09326s$. Како би се јасно могле утврдити оне вредности крајњих тренутака при којима је функција грешке минимална, неопходно је накнадно генерисати тачке у околини сваког од решења ТРВРР.



Слика 4.14 Друго решење TPBVP ($t_f = 0,150368s$) одређено применом методе

Differential Evolution



Слика 4.15 Треће решење TPBVP ($t_f = 0,187075s$) одређено применом методе

Differential Evolution

Иако нумерички алгоритми за глобалну оптимизацију дају одличне резултате са становишта тачности добијених резултата, што се јасно може видети са претходно добијених графика, време трајања нумеричког процеса је прилично дуго, што представља главну ману нумеричких алгоритама за глобалну оптимизацију генерално. Имајући у виду све предности и мане већ постојећих нумеричких алгоритама, проистекла је мотивација аутора⁴⁰ за развојем новог нумеричког алгорита за глобалну оптимизацију. Нумерички алгоритам GMTTPBVP2(), коришћен у овом поглављу, који је у целости приказан у Прилогу Б, формиран је у

⁴⁰ Такође, и на овом месту аутор жели да се захвали др Милану Дражићу, ванредном професору на Катедри за нумеричку математику и оптимизацију Математичког факултета Универзитета у Београду, на свеукупној помоћи при развоју нових нумеричких алгоритама за глобалну оптимизацију, као и бољем сагледавању и разумевању проблема који проистичу из примене истих.

програмском окружењу *MatLab*. Поступак рада програма GMTTPBVP2(), који у основи такође представља Монте Карло метод, може се описати у неколико следећих корака:

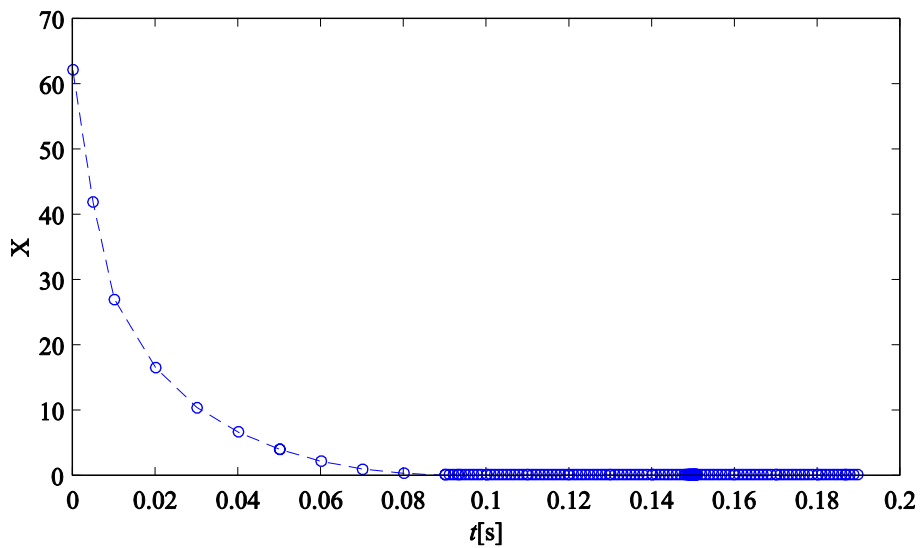
- програм GMTTPBVP2() нуди могућност минимизације функције грешке у следећа три случаја:
 - у првом случају задаје се само једна вредност крајњег тренутка (нпр. TFvec=0.1);
 - у другом случају задаје се одређен број вредности крајњих тренутака (нпр. TFvec=[0.01, 0.1, 0.25]);
 - у трећем случају задаје се интервал вредности крајњег тренутка са дефинисаним кораком h (нпр. TFvec=[0.01: 0.001: 0.15] где је $h = 0.001$).
- За случај да у матрици *BestRez* не постоји информација о функцији грешке X_i при разматраној вредности крајњег тренутка t_{ij} , програм GMTTPBVP2(), за унапред задати број случајних тачака (у конкретном примеру nStart = 100), полази од претходног блиског решења у првој итерацији, док у другој и свим наредним итерацијама програм генерише случајну тачку у простору $(\lambda_{20}^*, \dots, \lambda_{n0}^*)$ непознатих координата спрегнутог вектора у почетном тренутку посредством уграђене функције rand(), која генерише униформну дистрибуцију псеудослучајних бројева из унапред одређених интервала (4.25) у општем случају. За случај да у матрици *BestRez* постоји информација о функцији грешке, програм GMTTPBVP2() у том случају полази од датог, односно најбољег могућег решења у првој итерацији⁴¹, док у наредним, као и у претходном случају, генерише случајну тачку у простору $(\lambda_{20}^*, \dots, \lambda_{n0}^*)$. На овај начин, односно оваквим приступом, успели смо знатно да скратимо време трајања нумеричког процеса, што је био полазни циљ.
- Програм применом уграђене функције fminsearch(), која користи Нилдер–Мид симплекс метод за локалну минимизацију, одређује непознате координате

⁴¹ Под најбољим могућим решењем подразумева се оно решење које одговара минималној вредности функције грешке.

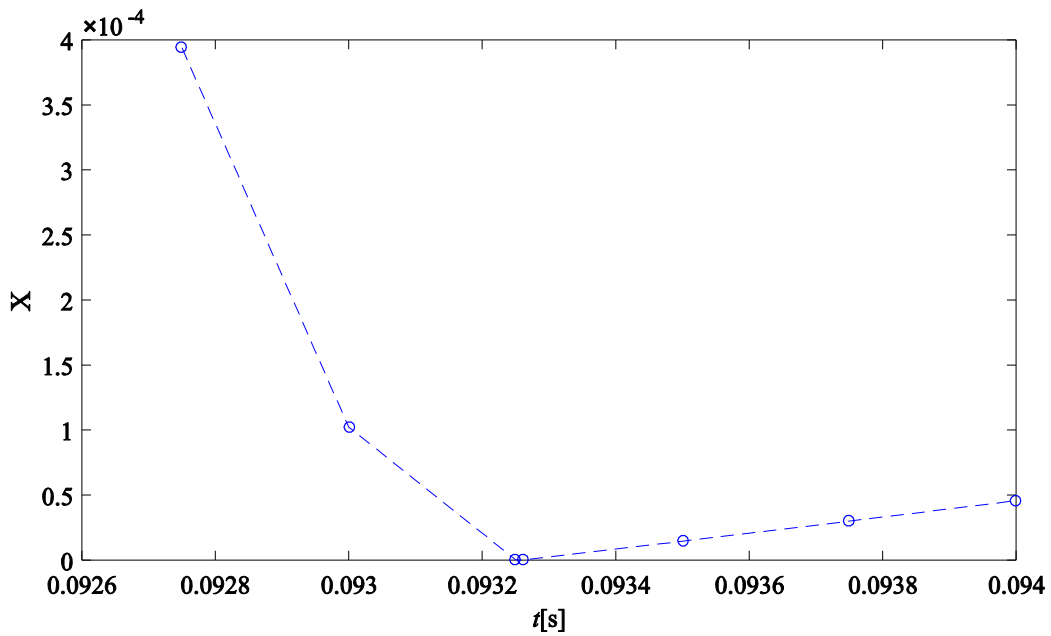
$\lambda_{20}^*, \dots, \lambda_{n0}^*$ спрегнутог вектора у почетном тренутку при којима је функција грешке минимална.

– Уколико је функција грешке при разматраној вредности крајњег тренутка мања, у односу на претходно одређену вредност, програм дато решења прихвата као најбоље могуће решење, које се памти у матрицу *BestRez*.

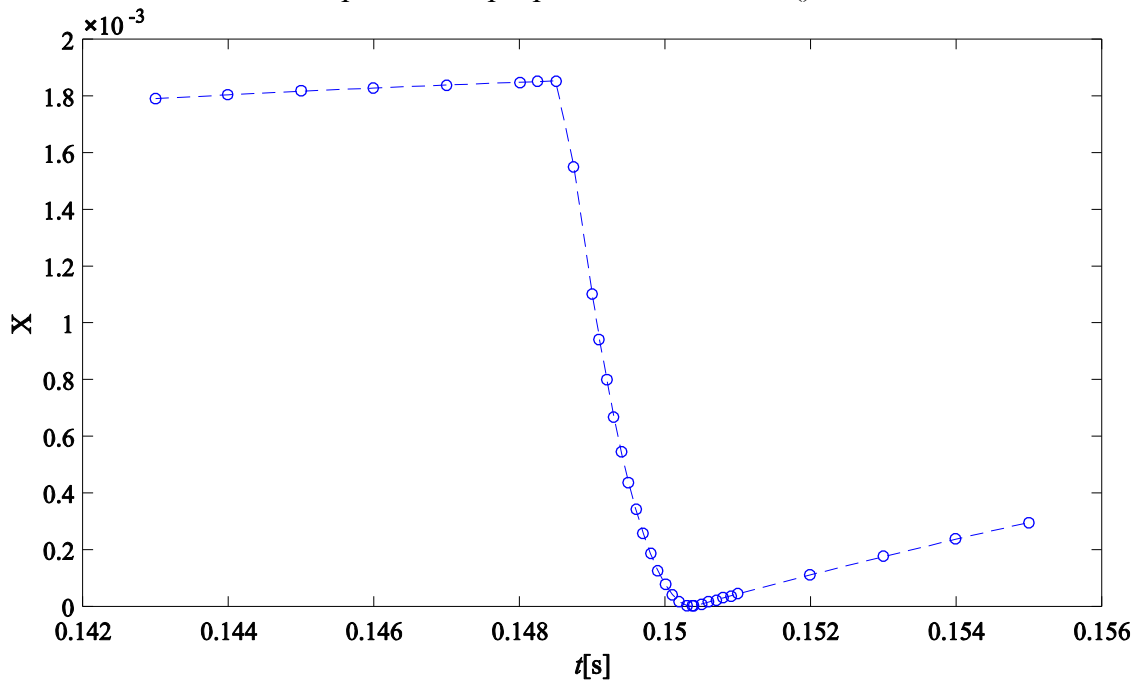
Графички прикази функције грешке одређене тачкама (t_{if}, X_i) , применом програма GMTTPBVP2() дати су на сликама 4.16–4.19.



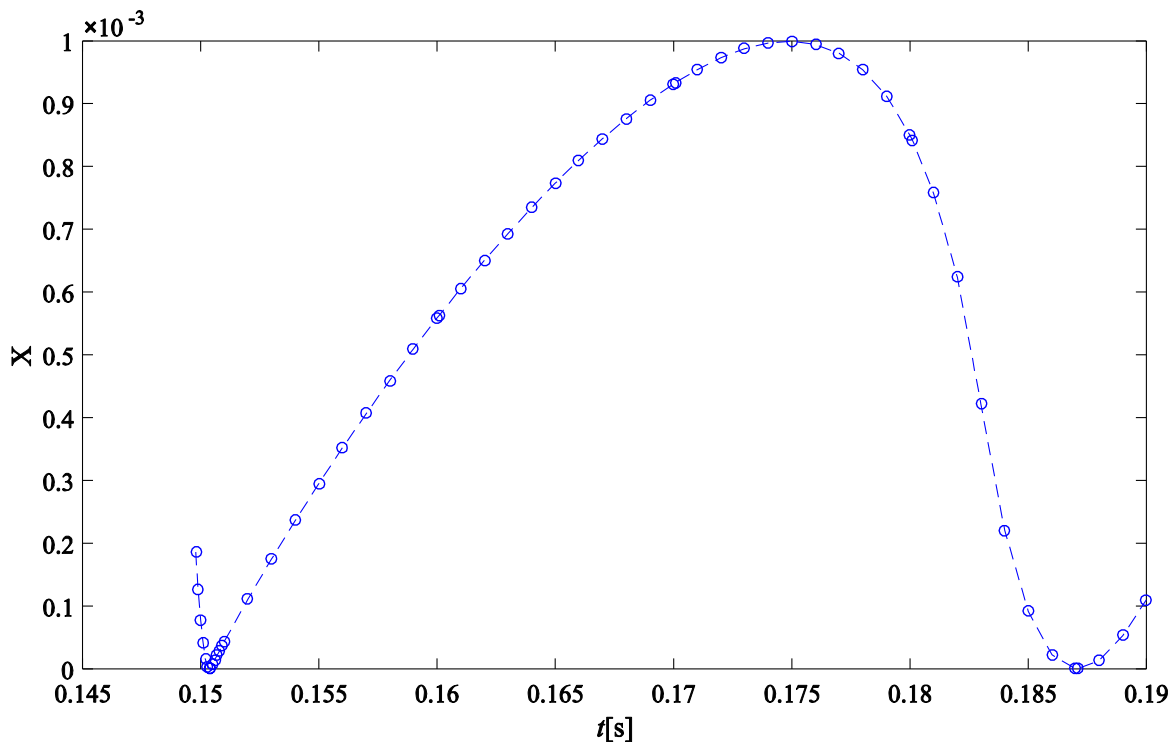
Слика 4.16 Функција грешке одређена тачкама (t_{if}, X_i) , применом програма GMTTPBVP2() у интервалу $0 \leq t \leq 0,19$ s



Слика 4.17 Глобалини минимум времена кретања ($t_f = 0,09326s$) одређен применом програма GMTTPBVP2()



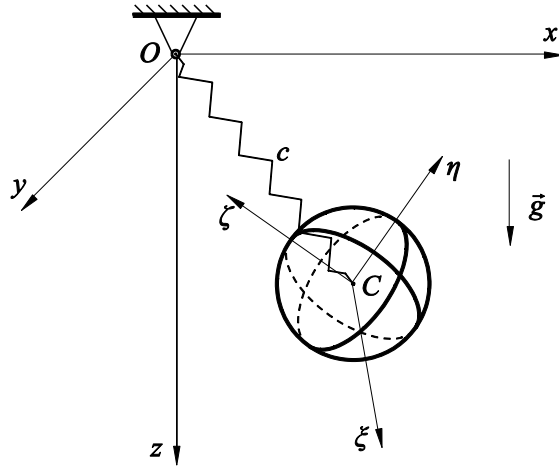
Слика 4.18 Друго решење TPBVP ($t_f = 0,150368s$) одређено применом програма GMTTPBVP2()



Слика 4.19 Треће решење TPBVP ($t_f = 0,187075\text{s}$) одређено применом програма GMTTPBVP2()

4.4 Нумерички пример 2

Разматра се кретање сфере, полупречника R и масе M , у хомогеном гравитационом пољу силе Земљине теже. Опруга крутости c и слободне дужине $l_0 = R$ везана је једним крајем за непокретну тачку O (видети слику 4.20), док је другим крајем везана за центар маса C сфере. Кофигурација сфере у односу на систем $Oxyz$ дефинисана је скупом координата $\mathbf{q} = (q^1, q^2, q^3, q^4, q^5, q^6)^T$, где су $q^1 = x_C$, $q^2 = y_C$ и $q^3 = z_C$ координате центра маса C сфере, док су $q^4 = \psi$, $q^5 = \zeta$ и $q^6 = \varphi$ Ојлерови углови прецесије, нутације и сопствене ротације респективно.



Слика 4.20 Кретање сфере у хомогеном гравитационом пољу

Израз за кинетичку енергију сфере има следећи облик

$$T = \frac{1}{2}M \left[(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 + (\dot{q}^3)^2 \right] + \frac{1}{2}J_C (\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\delta^2), \quad (4.54)$$

где је $J_C = \frac{2}{5}MR^2$, имајући притом у виду Ојлерове кинематичке једначине [Mladenović, 2008]

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{q}^4 \sin q^5 \sin q^6 + \dot{q}^5 \cos q^6, \\ \omega_\eta &= \dot{q}^4 \sin q^5 \cos q^6 - \dot{q}^5 \sin q^6, \\ \omega_\delta &= \dot{q}^4 \cos q^5 + \dot{q}^5. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Израз за кинетичку енергију добија сада следећи облик

$$T = \frac{1}{2}M \left[(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 + (\dot{q}^3)^2 \right] + \frac{1}{5}MR^2 \left[(\dot{q}^4)^2 + (\dot{q}^5)^2 + (\dot{q}^6)^2 + 2\dot{q}^4\dot{q}^6 \cos q^5 \right], \quad (4.56)$$

док израз за потенцијалну енергију сфере гласи

$$\Pi = -Mgq^3 + \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2} - R \right)^2. \quad (4.57)$$

Почетни (4.3), као и крајњи положај сфере на многострукости (4.4) одређени су

$$t_0 = 0, \quad q_0^1 = 0, \quad q_0^2 = 0, \quad q_0^3 = R, \quad q_0^4 = 0, \quad q_0^5 = \zeta_0, \quad q_0^6 = 0, \quad (4.58)$$

$$t = t_f, \quad \Psi_1 = q_f^3 - a \left(5 + \sin \left(\frac{q_f^1}{a} \right) + \sin \left(\frac{q_f^2}{a} \right) \right) = 0, \quad \Psi_2 = q_f^4 = 0, \quad (4.59)$$

$$\Psi_3 = q_f^5 - \pi / 2 = 0, \quad \Psi_4 = q_f^6 - 2\pi = 0,$$

где је $a = 1m$. Према (4.59) значи да се, у крајњем тренутку t_f , центар маса C сфере мора налазити на површи $f(x, y) = a(5 + \sin(x/a) + \sin(y/a))$. Релација ограничења (4.5), у складу са (4.55) и (4.56), има следећи облик

$$\Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}M \left[(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 + (\dot{q}^3)^2 \right] + \frac{1}{5}MR^2 \left[(\dot{q}^4)^2 + (\dot{q}^5)^2 + (\dot{q}^6)^2 \right. \\ \left. + 2\dot{q}^4 \dot{q}^6 \cos q^5 \right] - Mgq^3 + \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2} - R \right)^2 - E_0 = 0. \quad (4.60)$$

Квадратна форма (4.22) за $\lambda_0 = -1$, у складу са (4.55), (4.56) и (4.57), има следећи облик

$$\frac{1}{M} \lambda_{10}^2 + \frac{1}{M} \lambda_{20}^2 + \frac{1}{M} \lambda_{30}^2 + \frac{5}{2MR^2 \sin^2 \zeta_0} \lambda_{40}^2 + \frac{5}{2MR^2} \lambda_{50}^2 + \frac{5}{2MR^2 \sin^2 \zeta_0} \lambda_{60}^2 \\ - \frac{5}{MR^2} \frac{\cos \zeta_0}{\sin^2 \zeta_0} \lambda_{40} \lambda_{60} = \frac{1}{2 \left[E_0 + Mgq_0^3 - \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q_0^1)^2 + (q_0^2)^2 + (q_0^3)^2} - R \right)^2 \right]}, \quad (4.61)$$

где је $\Pi_0 = -Mgq_0^3 + \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q_0^1)^2 + (q_0^2)^2 + (q_0^3)^2} - R \right)^2$. У циљу свођења квадратне

форме (4.61) на канонски облик, уводи се линеарна трансформација координата спрегнутог вектора у облику

$$\lambda_1 = \lambda_1^*, \quad \lambda_2 = \lambda_2^*, \quad \lambda_3 = \lambda_3^*, \quad \lambda_4 = \lambda_4^* - \lambda_6^*, \quad \lambda_5 = \lambda_5^*, \quad \lambda_6 = \lambda_4^* + \lambda_6^*. \quad (4.62)$$

Како је $\det [c_i^j] = 2 \neq 0$, квадратна форма (4.61), после линеарне трансформације координата (4.62), добија канонски облик

$$\begin{aligned} & \frac{1}{M}(\lambda_{10}^*)^2 + \frac{1}{M}(\lambda_{20}^*)^2 + \frac{1}{M}(\lambda_{30}^*)^2 + \frac{5(1-\cos\zeta_0)}{MR^2 \sin^2 \zeta_0}(\lambda_{40}^*)^2 + \frac{5}{2MR^2}(\lambda_{50}^*)^2 \\ & + \frac{5(1+\cos\zeta_0)}{MR^2 \sin^2 \zeta_0}(\lambda_{60}^*)^2 = \frac{1}{2 \left[E_0 + Mgq_0^3 - \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q_0^1)^2 + (q_0^2)^2 + (q_0^3)^2} - R \right)^2 \right]}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Координата λ_{20}^* спрегнутог вектора може се изразити из (4.63)

$$\begin{aligned} \lambda_{20}^* = \pm & \left[\frac{M}{2 \left[E_0 + Mgq_0^3 - \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q_0^1)^2 + (q_0^2)^2 + (q_0^3)^2} - R \right)^2 \right]} \right. \\ & \left. - \left((\lambda_{10}^*)^2 + (\lambda_{30}^*)^2 + \frac{5(1-\cos\zeta_0)}{R^2 \sin^2 \zeta_0}(\lambda_{40}^*)^2 + \frac{5}{2R^2}(\lambda_{50}^*)^2 + \frac{5(1+\cos\zeta_0)}{R^2 \sin^2 \zeta_0}(\lambda_{60}^*)^2 \right)^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (4.64)$$

док услови трансверзалности (4.21) у крајњем положају сфере гласе

$$\Psi_5^* = \lambda_{1f}^* + \lambda_{3f}^* \cos\left(\frac{q_f^1}{a}\right) = 0, \quad \Psi_6^* = \lambda_{2f}^* + \lambda_{3f}^* \cos\left(\frac{q_f^2}{a}\right) = 0. \quad (4.65)$$

ТРВРР одређен је следећим диференцијалним једначинама првог реда у нормалном облику

$$\begin{aligned} \dot{q}^1 &= \frac{2 \left[E_0 + Mgq^3 - \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2} - R \right)^2 \right]}{M} \lambda_1^*, \\ \dot{q}^2 &= \frac{2 \left[E_0 + Mgq^3 - \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2} - R \right)^2 \right]}{M} \lambda_2^*, \\ \dot{q}^3 &= \frac{2 \left[E_0 + Mgq^3 - \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2} - R \right)^2 \right]}{M} \lambda_3^*, \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\dot{q}^4 = \frac{5 \left[E_0 + Mgq^3 - \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2} - R \right)^2 \right]}{MR^2 \sin^2 q^5} \left[(1 - \cos q^5) \lambda_4^* - (1 + \cos q^5) \lambda_6^* \right],$$

$$\dot{q}^5 = \frac{5 \left[E_0 + Mgq^3 - \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2} - R \right)^2 \right]}{MR^2} \lambda_5^*,$$

$$\dot{q}^6 = \frac{5 \left[E_0 + Mgq^3 - \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2} - R \right)^2 \right]}{MR^2 \sin^2 q^5} \left[(1 - \cos q^5) \lambda_4^* + (1 + \cos q^5) \lambda_6^* \right],$$

$$\dot{\lambda}_1^* = \frac{c}{2 \left[E_0 + Mgq^3 - \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2} - R \right)^2 \right]} \frac{\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2} - R}{\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2}} q^1,$$

$$\dot{\lambda}_2^* = \frac{c}{2 \left[E_0 + Mgq^3 - \frac{1}{2}c \left(\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2} - R \right)^2 \right]} \frac{\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2} - R}{\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2}} q^2,$$

(4.67)

$$\dot{\lambda}_3^* = \frac{\left(\frac{\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2} - R}{\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2}} cq^3 - Mg \right)}{2 \left[E_0 + Mgq^3 - \frac{1}{2} c \left(\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2} - R \right)^2 \right]},$$

$$\dot{\lambda}_4^* = 0,$$

$$\dot{\lambda}_5^* = \frac{5}{MR^2 \sin^3 q^5} \left[E_0 + Mgq^3 - \frac{1}{2} c \left(\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2} - R \right)^2 \right]$$

$$\left[\lambda_4^* (1 - \cos q^5) + \lambda_6^* (1 + \cos q^5) \right] \left[-\lambda_4^* (1 - \cos q^5) + \lambda_6^* (1 + \cos q^5) \right],$$

$$\dot{\lambda}_6^* = 0,$$

где је $\mathbf{u} = (\dot{q}^1, \dot{q}^3, \dot{q}^3, \dot{q}^4, \dot{q}^5, \dot{q}^6)^T$ вектор управљања, као и граничним условима (4.58), (4.59) и (4.65). Шестопараметарски шутинг састоји се у одређивању непознатих координата $\lambda_{10}^*, \lambda_{30}^*, \lambda_{40}^*, \lambda_{50}^*, \lambda_{60}^*$ спрегнутог вектора у почетном тренутку, као и минимално потребног времена t_f . Глобалне процене интервала вредности координата $\lambda_{10}^*, \lambda_{20}^*, \lambda_{30}^*, \lambda_{40}^*, \lambda_{50}^*$ и λ_{60}^* могу се одредити на основу канонске форме (4.63) у следећем облику

$$\begin{aligned} -\sqrt{\frac{M}{2(E_0 + Mgq_0^3)}} &\leq \lambda_{10}^* \leq \sqrt{\frac{M}{2(E_0 + Mgq_0^3)}}, \\ -\sqrt{\frac{M}{2(E_0 + Mgq_0^3)}} &\leq \lambda_{20}^* \leq \sqrt{\frac{M}{2(E_0 + Mgq_0^3)}}, \\ -\sqrt{\frac{M}{2(E_0 + Mgq_0^3)}} &\leq \lambda_{30}^* \leq \sqrt{\frac{M}{2(E_0 + Mgq_0^3)}}, \\ -\sqrt{\frac{MR^2 \sin^2 \zeta_0}{10(1 - \cos \zeta_0)(E_0 + Mgq_0^3)}} &\leq \lambda_{40}^* \leq \sqrt{\frac{MR^2 \sin^2 \zeta_0}{10(1 - \cos \zeta_0)(E_0 + Mgq_0^3)}}, \end{aligned} \tag{4.68}$$

$$-\sqrt{\frac{MR^2}{5(E_0 + Mgq_0^3)}} \leq \lambda_{50}^* \leq \sqrt{\frac{MR^2}{5(E_0 + Mgq_0^3)}},$$

$$-\sqrt{\frac{MR^2 \sin^2 \zeta_0}{10(1 + \cos \zeta_0)(E_0 + Mgq_0^3)}} \leq \lambda_{60}^* \leq \sqrt{\frac{MR^2 \sin^2 \zeta_0}{10(1 + \cos \zeta_0)(E_0 + Mgq_0^3)}},$$

док ћемо решења TPBVP одредити у интервалу крајњег тренутка

$$0 \leq t_f \leq 0,16s. \quad (4.69)$$

Функционалне релације (4.30), у складу са (4.59) и (4.65), сада могу бити успостављене у нумеричком облику

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\lambda_{10}^*, \lambda_{30}^*, \lambda_{40}^*, \lambda_{50}^*, \lambda_{60}^*, t_f) &= \Psi_1 = 0, & \Gamma_2(\lambda_{10}^*, \lambda_{30}^*, \lambda_{40}^*, \lambda_{50}^*, \lambda_{60}^*, t_f) &= \Psi_2 = 0, \\ \Gamma_3(\lambda_{10}^*, \lambda_{30}^*, \lambda_{40}^*, \lambda_{50}^*, \lambda_{60}^*, t_f) &= \Psi_3 = 0, & \Gamma_4(\lambda_{10}^*, \lambda_{30}^*, \lambda_{40}^*, \lambda_{50}^*, \lambda_{60}^*, t_f) &= \Psi_4 = 0, \\ \Gamma_5(\lambda_{10}^*, \lambda_{30}^*, \lambda_{40}^*, \lambda_{50}^*, \lambda_{60}^*, t_f) &= \Psi_5^* = 0, & \Gamma_6(\lambda_{10}^*, \lambda_{30}^*, \lambda_{40}^*, \lambda_{50}^*, \lambda_{60}^*, t_f) &= \Psi_6^* = 0. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Решења TPBVP одређена су за следеће вредности параметара

$$\begin{aligned} E_0 &= 5500 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}, \quad M = 3\text{kg}, \quad R = 0,2\text{m}, \\ c &= 0,2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad \zeta_0 = \pi/2, \quad g = 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Глобалне процене интервала вредности координата $\lambda_{10}^*, \lambda_{20}^*, \lambda_{30}^*, \lambda_{40}^*, \lambda_{50}^*$ и λ_{60}^* , одређене су основу (4.68) и (4.71)

$$\begin{aligned} -0,016506 \leq \lambda_{10}^* \leq 0,016506, & \quad -0,016506 \leq \lambda_{20}^* \leq 0,016506, \\ -0,016506 \leq \lambda_{30}^* \leq 0,016506, & \quad -0,001476 \leq \lambda_{40}^* \leq 0,001476, \\ -0,002088 \leq \lambda_{50}^* \leq 0,002088, & \quad -0,001476 \leq \lambda_{60}^* \leq 0,001476. \end{aligned} \quad (4.72)$$

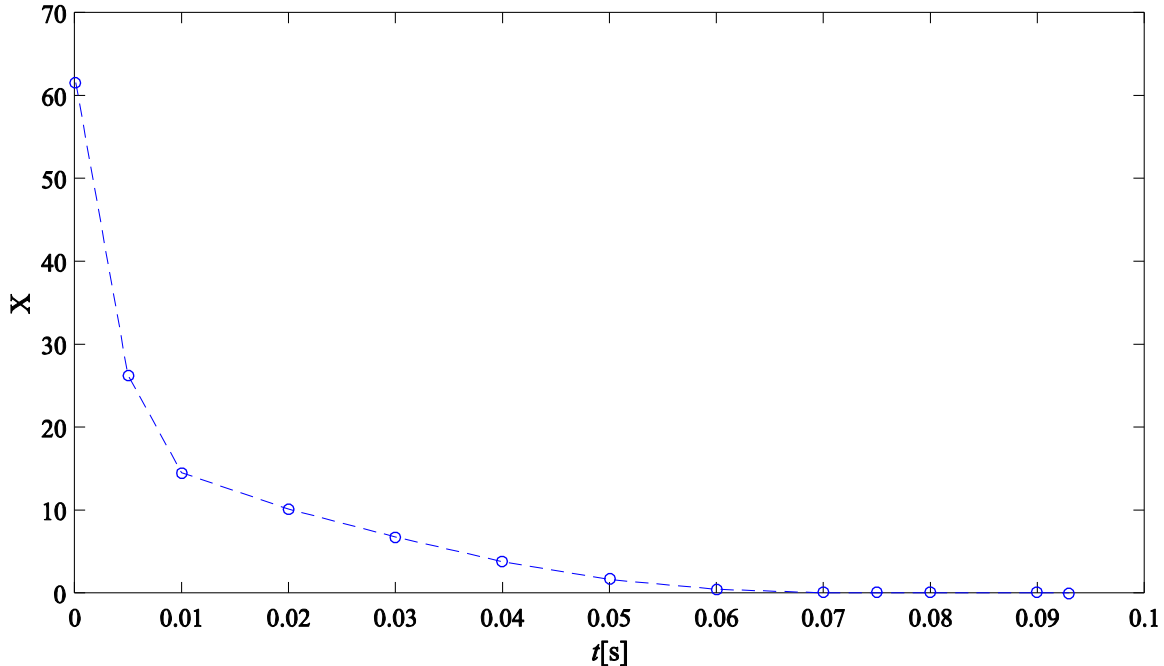
На основу одређених процена интервала свих непознатих граничних вредности, може се тврдити да се сва решења одговарајућег TPBVP сигурно налазе унутар датих интервала, а самим тим и глобални минимум времена при брахистохроном кретању сфере. Графички приказ функције грешке одређене тачкама (t_{if}, X_i) , применом програма GMTTPBVP2(), за

$$\lambda_{20}^* = \left[\frac{M}{2 \left[E_0 + Mgq_0^3 - \frac{1}{2} c \left(\sqrt{(q_0^1)^2 + (q_0^2)^2 + (q_0^3)^2} - R \right)^2 \right]} - \left((\lambda_{10}^*)^2 + (\lambda_{30}^*)^2 + \frac{5}{R^2} (\lambda_{40}^*)^2 + \frac{5}{2R^2} (\lambda_{50}^*)^2 + \frac{5}{R^2} (\lambda_{60}^*)^2 \right) \right]^{1/2}, \quad (4.73)$$

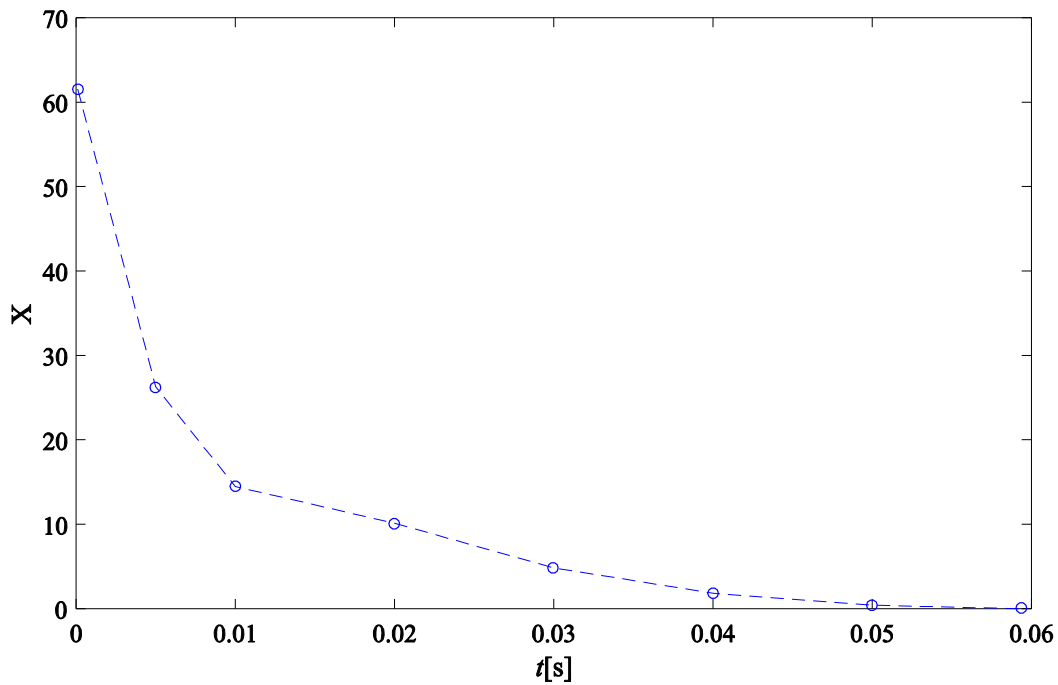
дат је на слици 4.21, док графички приказ функције грешке, за

$$\lambda_{20}^* = - \left[\frac{M}{2(E_0 + Mgq_0^3)} - \left((\lambda_{10}^*)^2 + (\lambda_{30}^*)^2 + \frac{5}{R^2} (\lambda_{40}^*)^2 + \frac{5}{2R^2} (\lambda_{50}^*)^2 + \frac{5}{R^2} (\lambda_{60}^*)^2 \right) \right]^{1/2}, \quad (4.74)$$

дат је на слици 4.22. У овом примеру метода *Differential Evolution* показала се неефикасном.



Слика 4.21 Функција грешке за $\lambda_{20}^* > 0$ одређена тачкама (t_{if}, X_i) , применом програма GMTTPBVP2() у интервалу $0 \leq t \leq 0,093017s$



Слика 4.22 Функција грешке за $\lambda_{20}^* < 0$ одређена тачкама (t_{if}, X_i) , применом програма GMTTPBVP2() у интервалу $0 \leq t \leq 0,059364\text{s}$

Нумеричка решења TPBVP, за $\lambda_{20}^* > 0$ и $\lambda_{20}^* < 0$ приказана у табелама 4.2 и 4.3 респективно, одређена су применом нумеричког алгоритма GMTTPBVP1().

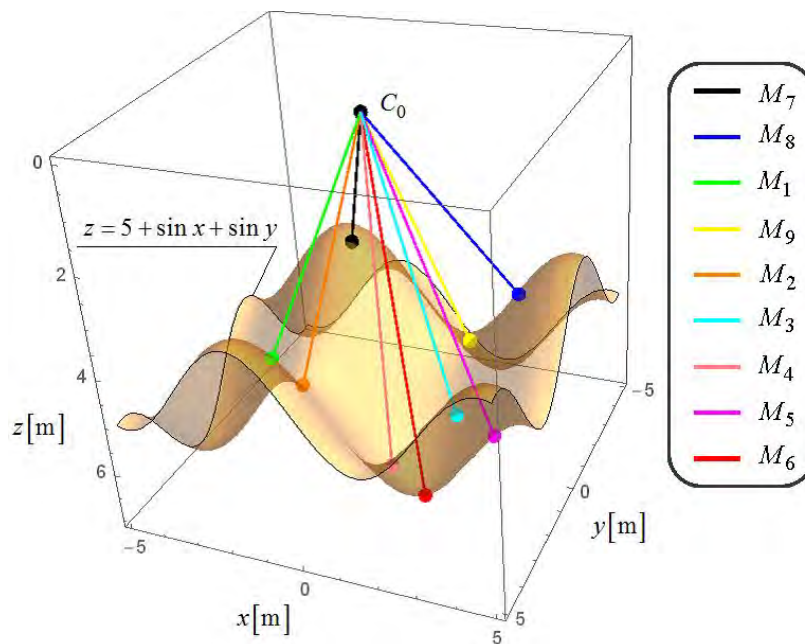
Табела 4.2 Нумеричка решења TPBVP за $\lambda_{20}^* > 0$

Решења	$\lambda_{10}^* [\text{s/m}]$	$\lambda_{30}^* [\text{s/m}]$	$\lambda_{40}^* [\text{s}]$	$\lambda_{50}^* [\text{s}]$	$\lambda_{60}^* [\text{s}]$	$t_f [\text{s}]$
(M_1)	-0,003901	0,011388	0,000174	$8,43 \times 10^{-16}$	0,000174	0,093017
(M_2)	-0,003975	0,014547	0,000169	$4,51 \times 10^{-16}$	0,000169	0,097723
(M_3)	0,009125	0,010021	0,000148	$1,72 \times 10^{-15}$	0,000148	0,126502
(M_4)	0,009464	0,012422	0,000145	$-4,89 \times 10^{-15}$	0,000145	0,134437
(M_5)	0,004831	0,012422	0,000145	$-1,76 \times 10^{-14}$	0,000145	0,134437
(M_6)	0,004197	0,015243	0,000139	$-4,98 \times 10^{-14}$	0,000139	0,157535

Табела 4.3 Нумеричка решења TPBVP за $\lambda_{20}^* < 0$

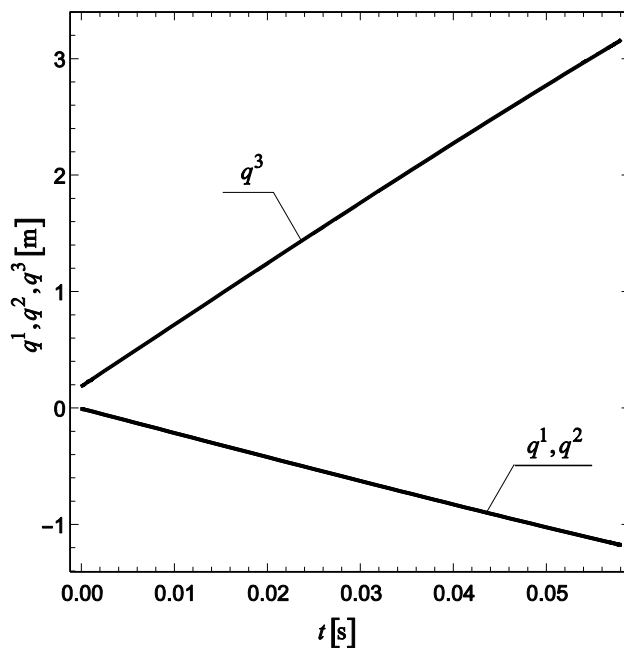
Решења	$\lambda_{10}^* [s/m]$	$\lambda_{30}^* [s/m]$	$\lambda_{40}^* [s]$	$\lambda_{50}^* [s]$	$\lambda_{60}^* [s]$	$t_f [s]$
(M_7)	-0,005521	0,014013	0,000246	$-3,61 \times 10^{-13}$	0,000246	0,059364
(M_8)	0,010953	0,011388	0,000174	$8,44 \times 10^{-14}$	0,000174	0,093017
(M_9)	0,006157	0,014547	0,000169	$7,91 \times 10^{-16}$	0,000169	0,097723

На слици 4.23 приказане су трајекторије центра маса C сфере при одређеним граничним вредностима датих у табелама 4.2 и 4.3. На основу одређених вредности, може се закључити да глобални минимум времена при брахистохроном кретању сфере одговара седмом решењу и износи $t_f = 0,059364 s$.

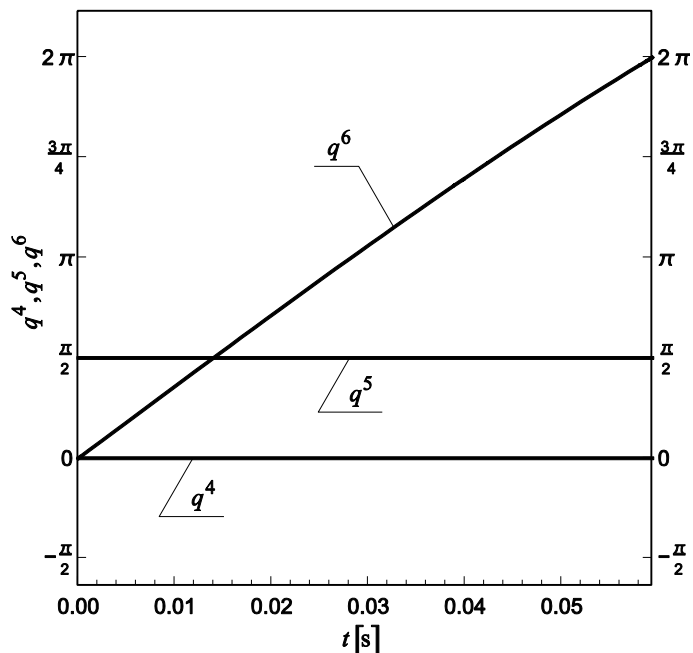


Слика 4.23 Трајекторије центра маса C сфере које одговарају респективно решењима $M_i (i = \overline{1,9})$

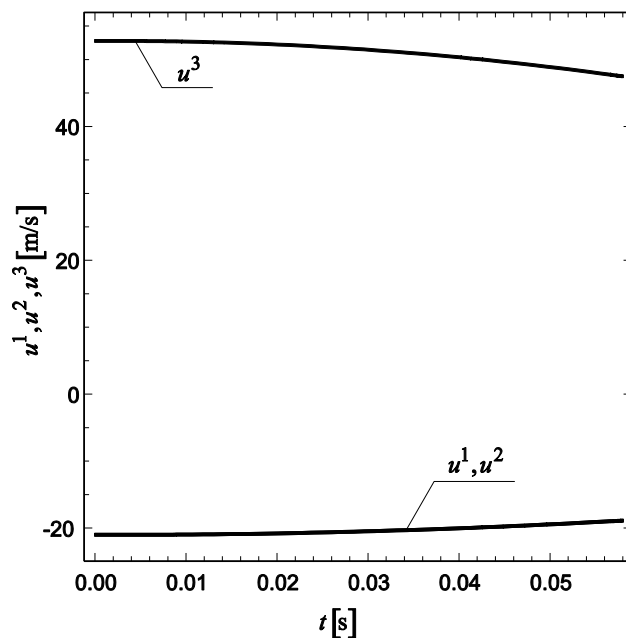
На сликама 4.24 и 4.25 приказани су закони промене генерализаних координата $q^i = q^i(t) (i = \overline{1,6})$, док су на сликама 4.26 и 4.27 приказани закони промене оптималних управљања $u^i = u^i(t) (i = \overline{1,6})$.



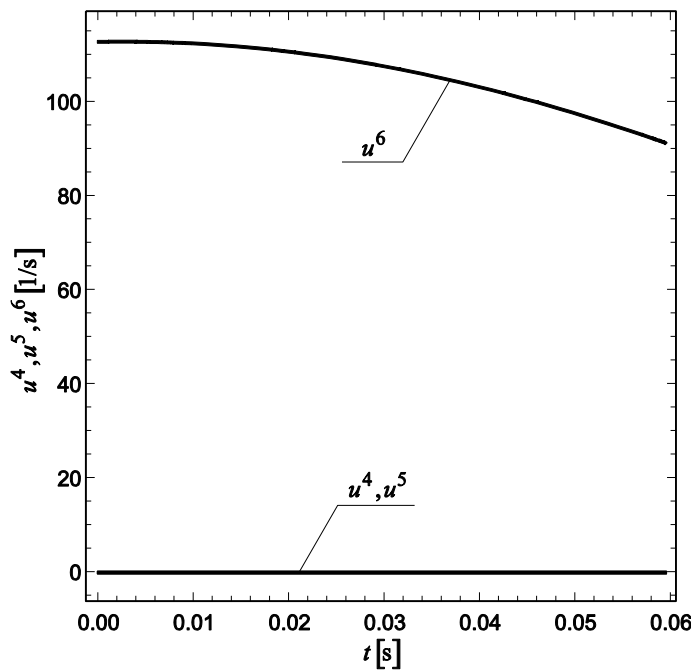
Слика 4.24 Генералисане координате $q^1 = q^1(t)$, $q^2 = q^2(t)$ и $q^3 = q^3(t)$ које одговарају седмом решењу (M_7)



Слика 4.25 Генералисане координате $q^4 = q^4(t)$, $q^5 = q^5(t)$ и $q^6 = q^6(t)$ које одговарају седмом решењу (M_7)



Слика 4.26 Оптимална управљања $u^1 = u^1(t)$, $u^2 = u^2(t)$ и $u^3 = u^3(t)$ која одговарају седмом решењу (M_7)



Слика 4.27 Оптимална управљања $u^4 = u^4(t)$, $u^5 = u^5(t)$ и $u^6 = u^6(t)$ која одговарају седмом решењу (M_7)

И у овом примеру, имајући у виду прве две једначине како основног (4.66), тако и спрегнутог (4.67) система, може се показати да је $q^2 = \lambda_{20}^* q^1 / \lambda_{10}^*$.

Уколико бисмо занемарили део кинетичке енергије при релативном кретању сфере у односу на сам центар маса C сфере, односно уколико бисмо посматрали сферу као материјалну тачку занемарљивог полупречника масе M , решења приказана у табелама 4.2 и 4.3 била би идентична решењима приказана у табели 3.1, што је само потврда исправности оба поступка.

Литература

- Antunes, A. C. B., Sigurd, C.: Controlling nonholonomic Chaplygin systems, *Braz J Phys*, 40, pp. 131–140, 2010.
- Bertolazzi, E., Biral, F., Da Lio, M.: Symbolic numeric efficient solution of optimal control problems for multibody systems, *J Comput Appl Math*, 185, pp. 404–421, 2006.
- Bryson, A. E., Ho, Y. C.: *Applied optimal control*, Hemisphere, New York, 1975.
- Čović, V., Vesković, M.: Brachistochronic motion of a multibody system with Coulomb friction, *Eur J Mech A Solid*, 28, pp. 882–890, 2009.
- Dixon, L. C. W., Biggs, M. C.: The advantages of adjoint control transformations when determining optimal trajectories by Pontryagin's maximum principle, *Aeronaut J.*, 76, pp. 169–174, 1972.
- Đukić, Đ. S., Atanacković, T. M.: A note on the classical brachistochrone, *Z Angew Math Phys*, 27, pp. 677–681, 1976.
- Fahroo, F., Ross, I. M.: Costate estimation by a Legendre pseudospectral method, *J Guid Control Dyn*, 24, pp. 270–277, 2001.
- Feoktistov, V.: *DIFFERENTIAL EVOLUTION*, Springer Science+Business Media, Berlin, 2006.
- Gabasov, R., Kirillova, F. M.: High order necessary conditions for optimality, *SIAM J Control*, 10, pp. 127–168, 1972.
- Graichen, K., Petit, N.: A continuation approach to state and adjoint calculation in optimal control applied to the reentry problem, In: *Proceedings of the 17th World congress the international federation of automatic control Seoul, Korea*, pp. 14307–14312, July 6–11 2008.
- Hirsch, M. J., Pardalos, P. M., Resende, M. G. C.: Solving systems of nonlinear equations with continuous GRASP, *Nonlinear Anal Real*, 10, pp. 2000–2006, 2009.
- Hirsch, M.J.: *GRASP-Based heuristics for continuous global optimization problems*, University of Florida, 2006.
- Hull, D. G.: Initial Lagrange multipliers for the shooting method, *J Guid Control Dyn*, 31, pp. 1490–1492, 2008.

- Hull, D.: On the variational process in optimal control theory, *J Optimiz Theory App*, 67, pp. 447–462, 1990.
- Hull, D.: *Optimal control theory for applications*, Springer, New York, 2003.
- Jiang, F., Baoyin, H., Li, J.: Practical techniques for lowthrust trajectory optimization with homotopic approach, *J Guid Control Dyn*, 35, pp. 245–258, 2012.
- Kelley, H., Kopp, R. E., Moyer, G. H.: Singular extremals, In: Leitmann G (ed) *Topics in optimization (mathematics in science and engineering, 31)*, Academic Press, New York, pp. 63–101, 1967.
- Lurie, A. I.: *Analytical mechanics*, Springer, Berlin Heidelberg, 2002.
- Mallipeddi, R., Suganthan, P.N., Pan, Q.K., Tasgetiren, M.F.: Differential evolution algorithm with ensemble of parameters and mutation strategies, *Applied Soft Computing*, 11, pp. 1679-1696, 2011.
- McConnell, A. J: The brachistochronic motion of a dynamical system, *Proc R Irish Acad*, 39A, pp. 31–48, 1930.
- Mehrpouya, M. A., Shamsi, M.: Gauss pseudospectral and continuation methods for solving two-point boundary value problems in optimal control theory, *Appl Math Model*, 39, pp. 5047–5057, 2015.
- Mladenović, C. N.: *Mehanika II Kinematika*, Mašinski fakultet, Beograd, 2008.
- Obradović, A., Šalinić, S., Jeremić, O.: On the brachistochronic motion of a variable-mass mechanical system in general force fields, *Math Mech Solids*, 19, pp. 398–410, 2014.
- Papastavridis, J. G.: *Analytical mechanics*, Oxford, University Press, New York, 2002.
- Park, Ch., Guibout, V., Scheeres, D.: Solving optimal continuous thrust rendezvous problems with generating functions, *J Guid Control Dyn*, 29, pp. 321–331, 2006.
- Qin, A. K., Huang, V. L., Suganthan, P. N.: Differential Evolution Algorithm With Strategy Adaptation for Global Numerical Optimization, *IEEE T Evolut Comput*, 13, pp. 398–417, 2009.
- Radulović, R., Obradović, A., Šalinić, S.: Contribution to the determination of the global minimum time for the brachistochronic motion of a holonomic mechanical system, *Meccanica*, 52 (4), pp. 795-805, 2017 (**IF = 1,949** за 2014. годину), First Online: 25 March 2016 (ISSN 0025-6455), [doi: 10.1007/s11012-016-0425-z](https://doi.org/10.1007/s11012-016-0425-z).

- Ruskeepää, H.: Mathematica[®] Navigator: mathematics, statistics, and graphics, 3rd edn. Academic Press, Burlington, 2009.
- Šalinić, S., Obradović, A., Mitrović, Z.: On the brachistochronic motion of mechanical systems with unilateral constraints, *Mech. Res. Commun.*, 45, pp. 1–6, 2012.
- Šalinić, S., Obradović, A., Mitrović, Z.: On the brachistochronic motion of the Chaplygin sleigh, *Acta Mech.*, 224, pp. 2127–2141, 2013.
- Scheiber, E., Lupu, M.: Numerical solutions to inverse problems of general planar motion, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 146, pp. 197–214, 1997.
- Seywald, H., Kumar, R. R.: Method for automatic costate calculation, *J Guid Control Dyn*, 19, pp. 1252–1261, 1996.
- Song, W., Wang, Y., Li, H-X.: Locating multiple optimal solutions of nonlinear equation systems based on multiobjective optimization, *IEEE T Evolut Comput*, 19, pp. 414–431, 2015.
- Stoer, J., Bulirsch, J.: *Introduction to numerical analysis*, Springer, New York, 1993.
- Strang, G.: *Linear algebra and its applications*, 3rd edn. Harcourt Brace Jovanovich, San Diego, 1988.
- Vujanović, B. D.: *Metodi optimizacije*, Novi Sad, 1980.
- Yablonskii, A. A., Nikiforova, V. M.: *Course of theoretical mechanics*, vol 1, 3rd edn. Vischaya Shkola, Moscow (in Russian), 1966.
- Zypman, F. R.: Instantaneous center of rotation and centrodes: background and new examples, *Int. J Mech. Eng. Educ.*, 35, pp. 79–90, 2007.

Поглавље 5

Глобални минимум времена при брахистохроном кретању нехолономног механичког система

5.1 Формулација и решење проблема оптималног управљања

Разматра се кретање нехолономног склерономног конзервативног механичког система. Конфигурација система одређена је са n генералисаних координата $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)^T$, које су независне у геометријском смислу. Кинетичка и потенцијална енергија система респективно су дате као [Lurie, 2002; Papastavridis, 2002]

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j, \quad (5.1)$$

$$\Pi = \Pi(\mathbf{q}), \quad (5.2)$$

где је $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)^T$ вектор генералисаних брзина, док су $a_{ij} = a_{ij}(\mathbf{q})$ координате коваријантног метричког тензора.

⁴² Користи се Ајнштајнова конвенција о сабирању. Индекси у Поглављу 5 узимају следеће вредности: $i, j, k = 1, \dots, n$; $r = 1, \dots, z$; $s = z + 1, \dots, n$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, m$; $\nu, \rho = m + 1, \dots, m + l = n$.

Кретање разматраног механичког система ограничава l идеалних независних нехолономних нехомогених механичких веза, које се према (1.8) могу записати у следећем облику

$$\psi^v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \equiv \dot{q}^v - b_\alpha^v \dot{q}^\alpha - b^v = 0, \quad (5.3)$$

где су $b_\alpha^v = b_\alpha^v(\mathbf{q})$ и $b^v = b^v(\mathbf{q})$. Број степена слободe кретања механичког система је $m = n - l$, који уједно представља и број кинематски независних координата q^α , које одговарају независним генералисаним брзинама \dot{q}^α . Како се независне генералисане брзине могу изразити у облику хомогене линеарне форме независних квазибрзина (кинематичких параметара) $\dot{\pi}^1, \dots, \dot{\pi}^m$

$$\dot{q}^\alpha = c_\beta^\alpha \dot{\pi}^\beta, \quad (5.4)$$

све генералисане брине \dot{q}^i , према (1.15), могу се изразити као

$$\dot{q}^i = c_\alpha^i \dot{\pi}^\alpha + \varphi^i, \quad (5.5)$$

где су $\varphi^\alpha = 0$ и $\varphi^v = b^v$, док су $c_\alpha^i = c_\alpha^i(\mathbf{q})$ непрекидне функције са непрекидним првим изводима у области, у којој разматрамо кретање система. Кинетичка енергија T^* нехолономног механичког система, према (1.29), одређена је следећим изразом

$$T^*(\mathbf{q}, \dot{\pi}) = T_{(\dot{q}^i = c_\alpha^i \dot{\pi}^\alpha + \varphi^i)} = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \dot{\pi}^\alpha \dot{\pi}^\beta + a_{ij} \varphi^i c_\beta^j \dot{\pi}^\beta + \frac{1}{2} a_{ij} \varphi^i \varphi^j, \quad (5.6)$$

где су

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{q}) = a_{ij} c_\alpha^i c_\beta^j, \quad (5.7)$$

координате коваријантног метричког тензора у односу на кинематски независне координате q^1, \dots, q^m , односно независне квазикоординате π^1, \dots, π^m . Нехолономни механички систем започиње кретање из положаја одређеног генералисаним координатама

$$t_0 = 0, \quad q^i(t_0) = q_0^i, \quad (5.8)$$

док је крајњи положај система одређен на многострукости

$$t = t_f, \quad \Psi_r(\mathbf{q}_f) = 0, \quad (5.9)$$

где је $\mathbf{q}_f = (q_f^1, \dots, q_f^n)^T$, $q_f^i = q^i(t_f)$. Имајући у виду да се нехолономни механички систем креће у произвољном пољу познатих потенцијалних сила, важи „закон” о одржању укупне механичке енергије [Lurie, 2002; Papastavridis, 2002]

$$\Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \Pi(\mathbf{q}) - E_0 = 0, \quad (5.10)$$

где је $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)^T$ вектор независних квазибрзина, док је $E_0 \in \mathbb{R}$ вредност механичке енергије система у почетном тренутку $t_0 = 0$. Узимањем независних квазибрзина \dot{q}^α за управљачке променљиве u^α респективно

$$\dot{q}^\alpha = u^\alpha, \quad (5.11)$$

брахистохрони проблем механичког система састоји се у одређивању екстремалних управљања $u^\alpha = u^\alpha(t)$, као и њима, у складу са (5.5), одговарајућих генералисаних координата $q^i = q^i(t)$, тако да механички систем који започиње кретање из положаја (5.8), пређе у крајњи положај на многострукости (5.9), уз неизмењену вредност механичке енергије (5.10), за минимално време t_f . То се може изразити у виду услова да функционал

$$J(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = \int_0^{t_f} dt, \quad (5.12)$$

где је $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)^T$ вектор управљања из отвореног скупа G_u векторског простора V_m , на интервалу $[0, t_f]$ има минималну вредност. Понтрјагинова функција сада има следећи облик [Vuković, 1984; Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962; Bryson, Ho, 1975; Hull, 2003; Hull, 1990]

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 + \lambda_i (c_\alpha^i u^\alpha + \varphi^i), \quad (5.13)$$

где је $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ спрегнути вектор и $\lambda_0 = \text{const.} \leq 0$, док су $\lambda_i(\cdot): [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$.

Спроведећи поступак приказан у Поглављу 4, одређен је Лагранжев множитељ μ

$$\mu(\mathbf{q}) = -\frac{\lambda_0}{2[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]}, \quad (5.14)$$

док се екстремална управљања u^α добијају у следећем облику

$$u^\alpha(\mathbf{q}, \lambda) = -G^{\alpha\beta}(\mathbf{q}) \left[\frac{2[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]}{\lambda_0} \lambda_i c_\beta^i + a_{ij} \varphi^i c_\beta^j \right], \quad (5.15)$$

где су $G^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta}(\mathbf{q})$ координате контраваријантног метричког тензора у односу на кинематски независне координате q^1, \dots, q^m . Основни и спрегнути систем одређени су, респективно, следећим диференцијалним једначинама првог реда у нормалном облику

$$\dot{q}^i = -G^{\alpha\beta}(\mathbf{q}) c_\alpha^i \left[\frac{2[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]}{\lambda_0} \lambda_j c_\beta^j + a_{jk} \varphi^j c_\beta^k \right] + \varphi^i, \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i &= G^{\alpha\beta}(\mathbf{q}) \frac{\partial c_\alpha^j}{\partial q^i} \lambda_j \left[\frac{2[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]}{\lambda_0} \lambda_k c_\beta^k + a_{jk} \varphi^j c_\beta^k \right] - \lambda_j \frac{\partial \varphi^j}{\partial q^i} \\ &\quad - \frac{\lambda_0}{2[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]} \frac{\partial \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{u})}{\partial q^i}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

док за случај да је механички систем подвргнут хомогеним нехолономним везама ($\varphi^i = 0$), једначине (5.16) и (5.17) добијају следећи облик

$$\dot{q}^i = -\frac{2[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]}{\lambda_0} G^{\alpha\beta}(\mathbf{q}) c_\alpha^i c_\beta^j \lambda_j, \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i &= \frac{2[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]}{\lambda_0} G^{\alpha\beta}(\mathbf{q}) \lambda_j \frac{\partial c_\alpha^j}{\partial q^i} \lambda_k c_\beta^k - \frac{\lambda_0}{2[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]} \frac{\partial \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{u})}{\partial q^i} \\ &= \frac{2[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]}{\lambda_0} c_\beta^k \left(G^{\alpha\beta}(\mathbf{q}) \frac{\partial c_\alpha^j}{\partial q^i} + \frac{1}{2} \frac{\partial G^{\alpha\beta}(\mathbf{q})}{\partial q^i} c_\alpha^j \right) \lambda_j \lambda_k - \frac{\lambda_0}{2[E_0 - \Pi(\mathbf{q})]} \frac{\partial \Pi(\mathbf{q})}{\partial q^i}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

имајући у виду притом да су $G^{\alpha\gamma} (\partial G_{\alpha\beta} / \partial q^i) G^{\beta\delta} = -\partial G^{\gamma\delta} / \partial q^i$. Услови трансверзалности у крајњем тренутку су

$$\Psi_s^*(\mathbf{q}_f, \lambda_f) = 0. \quad (5.20)$$

На основу првог интеграла

$$\lambda_0 + \lambda_{i0} \left(c_{\alpha 0}^i u_0^\alpha + \varphi_0^i \right) = 0, \quad (5.21)$$

одређеног у почетном тренутку $t_0 = 0$, имајући у виду притом (5.15), добија се

$$\lambda_0 - \frac{2(E_0 - \Pi_0)}{\lambda_0} G_0^{\alpha\beta} c_{\alpha 0}^i c_{\beta 0}^j \lambda_{i0} \lambda_{j0} - G_0^{\alpha\beta} a_{jk0} \varphi_0^k c_{\alpha 0}^i c_{\beta 0}^j \lambda_{i0} + \lambda_{i0} \varphi_0^i = 0, \quad (5.22)$$

док за случај $\varphi^i = 0$, добија се следећа, у општем случају, семидефинитна квадратна форма

$$G_0^{\alpha\beta} c_{\alpha 0}^i c_{\beta 0}^j \lambda_{i0} \lambda_{j0} = \frac{\lambda_0^2}{2(E_0 - \Pi_0)} = \text{const.}, \quad (5.23)$$

где су $\lambda_{i0} = \lambda_i(t_0)$, $a_{ij0} = a_{ij}(\mathbf{q}_0)$, $G_0^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_0)$, $c_{\alpha 0}^i = c_\alpha^i(\mathbf{q}_0)$, $\varphi_0^i = \varphi^i(\mathbf{q}_0)$, $\Pi_0 = \Pi(\mathbf{q}_0)$ и $\mathbf{q}_0 = (q_0^1, \dots, q_0^n)$. Уколико је $\lambda_0 = 0$, следи да су $\mu(t) \equiv 0$ и $\lambda_i(t) \equiv 0$, односно све координате спрегнутог вектора су идентички једнаке нули. Неопходни услови оптималности, одређени Теоремом 1 [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962], за $\lambda_0 = 0$ нису задовољени, с обзиром да је спрегнути вектор за $\lambda_0 = 0$ нула вектор, што је у супротности са принципом максимума. Овим је показано да се глобалне процене интервала вредности свих координата λ_{i0} спрегнутог вектора у почетном тренутку, за случај брахистохроног кретања нехолономног механичког система, не могу одредити у општем случају, имајући у виду (5.22), односно (5.23). Ако се има у виду да се једна од координата спрегнутог вектора у почетном тренутку може изразити из (5.22), односно (5.23), у функцији од преосталих координата, као и да је крајњи тренутак t_f непознат, број непознатих граничних услова који се одређују једнак је броју геометријски независних координата n . Иако се не могу одредити глобалне процене интервала вредности свих координата λ_{i0} спрегнутог вектора у почетном тренутку у општем случају, у оквиру нумеричких примера који следе у наставку биће разматрано код којих нехолономних

механичких модела, као и под којим условима смо у могућности да одредимо глобални минимум времена кретања.

5.2 Нумерички пример 1

У примеру 1 изложен је поступак одређивања глобалног минимума времена за случај брахистохроног кретања Чаплигинових саоница (видети слику 1.2), између два задата положаја у хоризонталној равни, уз неизмењену вредност механичке енергије у току кретања. Конфигурација саоница у односу на систем Ox дефинисана је скупом Лагранжевих координата (q^1, q^2, q^3) , где је $q^1 = \varphi$ угао између осе Ox и осе $A\xi$, док су $q^2 = x$ и $q^3 = y$ Декартове координате тачке A . Диференцијалне једначине кретања саоница, применом различитих поступака, изведене су у Поглављу 1. Релација ограничења (5.10), у складу са (1.271), има следећи облик

$$\Phi = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}ma^2k^2\omega^2 - T_0 = 0, \quad (5.24)$$

где је $k^2 = 1 + I_C / (ma^2)$, док је $T_0 \in \mathbb{R}$ кинетичка енергија саоница у почетном тренутку $t_0 = 0$. За управљачке променљиве u^1 и u^2 респективно су узете угаона брзина ω саоница, као и брзина V тачке A сечива

$$\dot{\pi}^1 = \omega = u^1, \quad \dot{\pi}^2 = V = u^2, \quad (5.25)$$

где су $\omega = \vec{\omega} \cdot \vec{v}$ и $V = \vec{V} \cdot \vec{\lambda}$. Све генералисане брзине сада се могу изразити у функцији независних квазибрзина (*управљања*)

$$\dot{q}^1 = \dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{q}^2 = \dot{x} = V \cos \varphi, \quad \dot{q}^3 = \dot{y} = V \sin \varphi. \quad (5.26)$$

Почетни положај (5.8), као и крајњи положај (5.9) саоница респективно су одређени следећим вредностима генералисаних координата

$$t_0 = 0, \quad q_0^1 = 0, \quad q_0^2 = 0, \quad q_0^3 = 0, \quad (5.27)$$

$$t = t_f, \quad q^1(t_f) = q_f^1, \quad q^2(t_f) = q_f^2, \quad q^3(t_f) = q_f^3, \quad (5.28)$$

где су услови трансверзалности (5.20) у крајњем тренутку идентички задовољени. За $\lambda_0 = -1$, Лагранжев множитељ μ према (5.14) је

$$\mu = \frac{1}{2T_0}. \quad (5.29)$$

Екстремална управљања u^1 и u^2 , на основу (5.15), (5.24) и (5.26), имају следећи облик

$$u^1 = \omega = \frac{2T_0}{m} \frac{1}{a^2 k^2} \lambda_\varphi, \quad u^2 = V = \frac{2T_0}{m} (\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi), \quad (5.30)$$

где су $\lambda_\varphi = \lambda_1, \lambda_x = \lambda_2$ и $\lambda_y = \lambda_3$. Диференцијалне једначине основног и спрегнутог систем, на основу (5.18), (5.19) и (5.24), имају следећи облик

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{2T_0}{m} \frac{1}{a^2 k^2} \lambda_\varphi, & \dot{x} &= \frac{2T_0}{m} (\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi) \cos \varphi, \\ \dot{y} &= \frac{2T_0}{m} (\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi) \sin \varphi, & \dot{\lambda}_\varphi &= \frac{2T_0}{m} (\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi) (\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi), \\ \dot{\lambda}_x &= 0, & \dot{\lambda}_y &= 0, \end{aligned} \quad (5.31)$$

где су $\lambda_x = \text{const.}$ и $\lambda_y = \text{const.}$. Квадратна форма (5.23), у разматраном примеру, има следећи облик

$$-\frac{1}{ma^2 k^2} \lambda_{\varphi 0}^2 + \frac{1}{m} \lambda_x^2 = \frac{1}{2T_0}. \quad (5.32)$$

Процене интервала вредности координата $\lambda_{\varphi 0}$ и λ_x спрегнутог вектора могу се одредити на основу квадратне форме (5.32)

$$-\sqrt{\frac{ma^2 k^2}{2T_0}} \leq \lambda_{\varphi 0} \leq \sqrt{\frac{ma^2 k^2}{2T_0}}, \quad (5.33)$$

$$-\sqrt{\frac{m}{2T_0}} \leq \lambda_x \leq \sqrt{\frac{m}{2T_0}}, \quad (5.34)$$

док се из (5.32), као што је речено, $\lambda_{\varphi 0}$ може изразити у следећем облику

$$\lambda_{\varphi 0} = \pm ak \sqrt{\frac{m}{2T_0} - \lambda_x^2}. \quad (5.35)$$

На основу позитивно дефинитне квадратне форме управљања (5.24), могу се одредити домени дефинисаности управљања u^1 и u^2 респективно

$$-\sqrt{\frac{2T_0}{ma^2k^2}} \leq u^1 \leq \sqrt{\frac{2T_0}{ma^2k^2}}, \quad (5.36)$$

$$-\sqrt{\frac{2T_0}{m}} \leq u^2 \leq \sqrt{\frac{2T_0}{m}}. \quad (5.37)$$

На основу (5.30), (5.36) и (5.37), следеће двојне неједнакости могу бити успостављене

$$-\sqrt{\frac{ma^2k^2}{2T_0}} \leq \lambda_\varphi \leq \sqrt{\frac{ma^2k^2}{2T_0}}, \quad (5.38)$$

$$-\sqrt{\frac{m}{2T_0}} \leq \lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi \leq \sqrt{\frac{m}{2T_0}}. \quad (5.39)$$

До (5.38) и (5.39) могло се доћи полазећи од тога да је вредност Понтрјагинове функције на оптималној трајекторији у сваком тренутку једнака нули [*Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962; Bryson, Ho, 1975; Hull, 2003*]

$$-1 + \lambda_i c_\alpha^i u^\alpha = 0, \quad (5.40)$$

односно, у развијеном облику, имајући у виду притом (5.30)

$$\left(\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi\right)^2 + \frac{1}{a^2k^2} \lambda_\varphi^2 = \frac{m}{2T_0}, \quad (5.41)$$

одакле се могу одредити процене (5.38) и (5.39). Сада, на основу (5.34) и (5.39), може се одредити процена интервала вредности координате λ_y у следећем облику

$$-\sqrt{\frac{m}{2T_0}} \cot \frac{\varphi}{2} \leq \lambda_y \leq \sqrt{\frac{m}{2T_0}} \cot \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi \neq n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.42)$$

где се за φ , по могућности, може узети минимална вредност φ^* скупа бројева одређених максималним вредностима угла за свако од решења ТРВР. Како унапред нису познати закони промене угла φ за свако од решења ТРВР, за φ^* најпре се може узети она вредност угла која одговара крајњем положају сечива, односно

$$-\sqrt{\frac{m}{2T_0}} \cot \frac{\varphi_f}{2} \leq \lambda_y \leq \sqrt{\frac{m}{2T_0}} \cot \frac{\varphi_f}{2}. \quad (5.43)$$

Важно је овде напоменути да при вредности крајњег угла сечива $\varphi_f = 0$, као и при вредности $\varphi_f = \pi$, процена интервала вредности координате λ_y не може се одредити, те ће ови случајеви у наредном делу бити посебно разматрани. Имајући у виду да је крајњи положај саоница одређен генерализаним координата (5.28), следеће функционалне релације у нумеричком облику сада могу бити успостављене

$$\begin{aligned}\varphi(t_f) - \varphi_f &= \Gamma_\varphi(\lambda_x, \lambda_y, t_f), \\ x(t_f) - x_f &= \Gamma_x(\lambda_x, \lambda_y, t_f), \\ y(t_f) - y_f &= \Gamma_y(\lambda_x, \lambda_y, t_f).\end{aligned}\tag{5.44}$$

Решења TPBVP могу бити геометријски представљена у простору \mathbb{R}^3 са осама λ_x, λ_y и t_f посредством уграђене **ContourPlot3D()** *Mathematica* функције. Наиме, сада је могуће у простору $(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$ одредити пресек површи (5.44) као

$$p_f = \Gamma_2(\lambda_x, \lambda_y, t_f) \cap \Gamma_3(\lambda_x, \lambda_y, t_f), \quad q_f = \Gamma_2(\lambda_x, \lambda_y, t_f) \cap \Gamma_1(\lambda_x, \lambda_y, t_f),\tag{5.45}$$

где су p_f и q_f просторне линије представљене следећим функционалним зависностима у нумеричком облику

$$p_f = f_p(\lambda_x, t_f), \quad q_f = f_q(\lambda_x, t_f).\tag{5.46}$$

Сада, решења TPBVP могу се геометријски представити тачкама добијеним пресеком просторних линија (5.46) у простору $(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$ као

$$f_p(\lambda_x, t_f) \cap f_q(\lambda_x, t_f) = \{M_1, \dots, M_r\}.\tag{5.47}$$

Број елемената скупа (5.47) једнак је броју решења TPBVP, док координате пресечних тачака у простору $(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$ представљају решења TPBVP.

Решења TPBVP одредићемо за следеће вредности параметара

$$m = 2\text{kg}, \quad a = 1\text{m}, \quad x_f = 1\text{m}, \quad y_f = 1\text{m}, \quad k = 1,5, \quad T_0 = 200 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}.\tag{5.48}$$

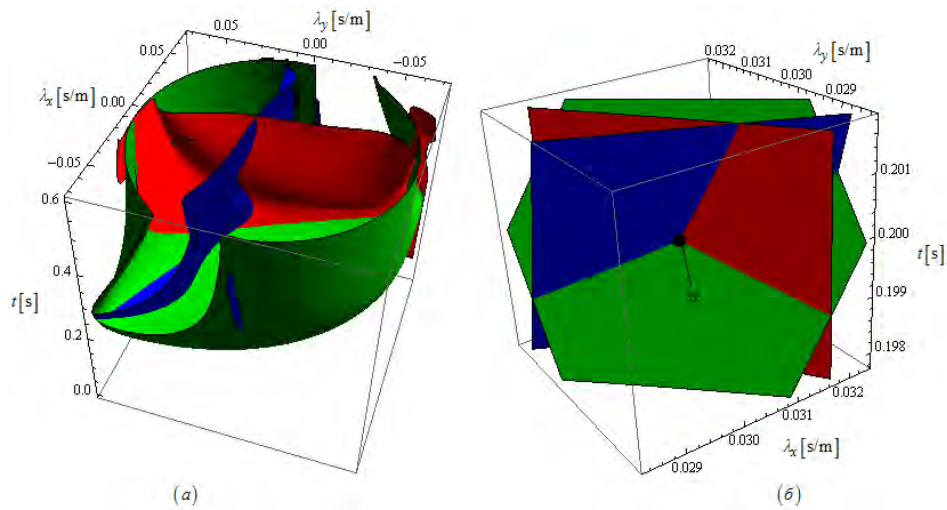
У случајевима који следе у наставку, биће разматран утицај промене вредности крајњег угла φ_f на појаву вишеструких решења TPBVP.

5.2.1 Случај $\varphi_f = \pi / 2$

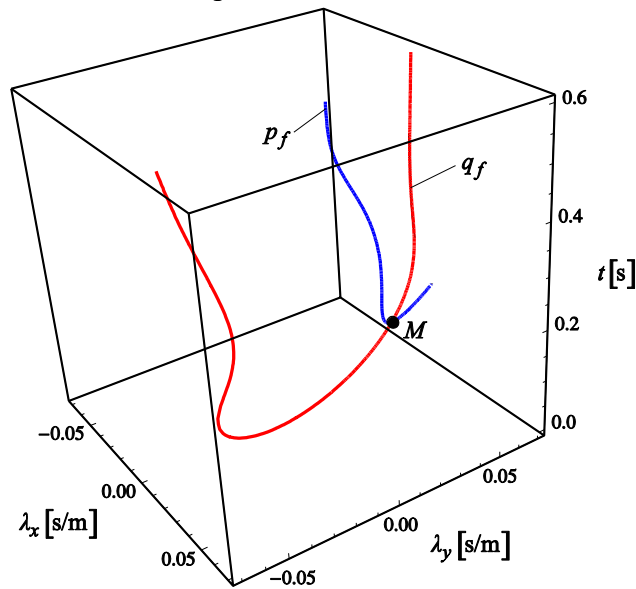
Како бисмо упоредили резултате добијене применом изложеног поступка, са резултатима добијеним у раду [Šalinić, Obradović, Mitrović, 2013], као и показали да је добијено решење у раду [Šalinić, Obradović, Mitrović, 2013] оптимално, најпре ћемо разматрати случај када је $\varphi_f = \pi / 2$. На основу (5.34), (5.43) и (5.48), могу се одредити процене интервала вредности координата λ_x и λ_y

$$-0,0707 \leq \lambda_x \leq 0,0707, \quad -0,0707 \leq \lambda_y \leq 0,0707. \quad (5.49)$$

Имајући у виду да се одговарајуће површи, односно просторне линије, секу само у једној тачки (видети слике 5.1 и 5.2), сада се са сигурношћу може тврдити да постоји јединствено решење TPBVP за случај $\varphi_f = \pi / 2$, као и да је оно оптимално. На слици 5.1(a) дат је пресек површи (5.44) за $\varphi_f = \pi / 2$ у интервалу $0 \leq t \leq 0,6s$, док је на слици 5.1(b) дат пресек површи за нешто ужи интервал како би се јасније уочила тачка пресека површи. На слици 5.2 приказан је пресек просторних линија p_f и q_f , где се јасно може уочити тачка пресека M чије координате у \mathbb{R}^3 простору $(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$ одговарају решењу TPBVP. Визуелне процене координата пресечне тачке M са слике 5.2 су $(0, 0, 0.2)$, које представљају почетну итерацију за налажење тачних вредности применом шутинг методе.

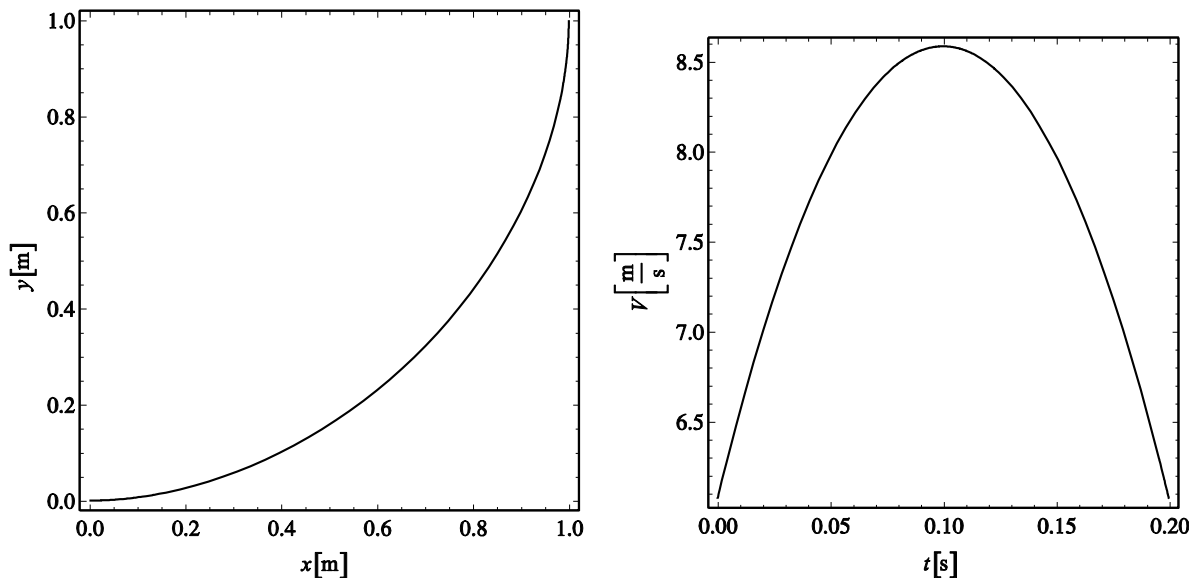


Слика 5.1 (а) Површи $\Gamma_\varphi(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$, $\Gamma_x(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$ и $\Gamma_y(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$ за $\varphi_f = \pi/2$; (б) пресечна тачка M



Слика 5.2 Просторне линије $p_f = f_p(\lambda_x, t_f)$ и $q_f = f_q(\lambda_x, t_f)$ за $\varphi_f = \pi/2$

За $\varphi_f = \pi/2$ добијене су следеће граничне вредности: $t_f = 0,199832$ s, $\lambda_x = 0,0303507$ s/m и $\lambda_y = 0,0303507$ s/m. Добијене граничне вредности се у потпуности поклапају са вредностима добијеним у раду [Šalinić, Obradović, Mitrović, 2013]. Трајекторија тачке A , као и закон промене брзине V тачке A сечива приказани су на слици 5.3.

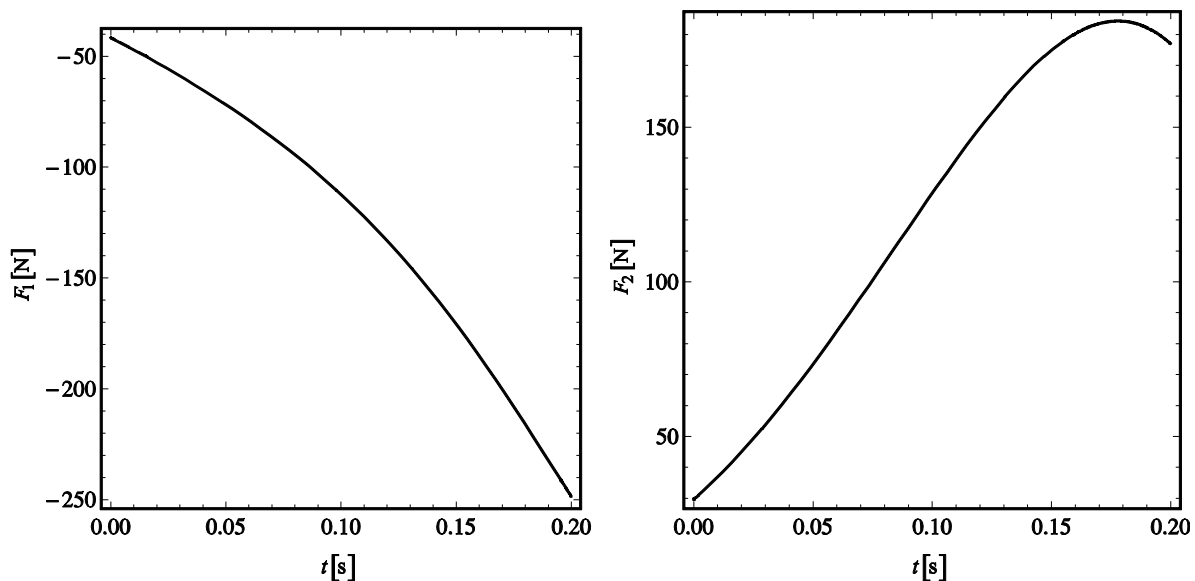


Слика 5.3 Трајекторија и брзина V тачке A сечива за $\varphi_f = \pi/2$

Реализација брахистохроног кретања саоница може се остварити управљачким силама, чија је укупна снага током брахистохроног кретања једнака нули, које могу бити представљене у облику активних управљачких сила, силама реакција веза, или њиховом међусобном комбинацијом. Један од начина реализације брахистохроног кретања саоница је остварен активном управљачком силом $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ која дејствује у тачки C (видети слику 1.2(a)). Закони промене управљачких сила F_1 и F_2 , као и реакције R нехолономне везе у функцији дефинисаних величина и њихових извода, према (1.276) и (1.277), односно према (1.279), одређени су следећим изразима

$$F_1 = m(\dot{V} - a\omega^2), \quad F_2 = m(ak^2\dot{\omega} + \omega V), \quad R = -\dot{\omega} \frac{I_C}{a}. \quad (5.50)$$

На слици 5.4 приказани су закони промене управљачких сила F_1 и F_2 .

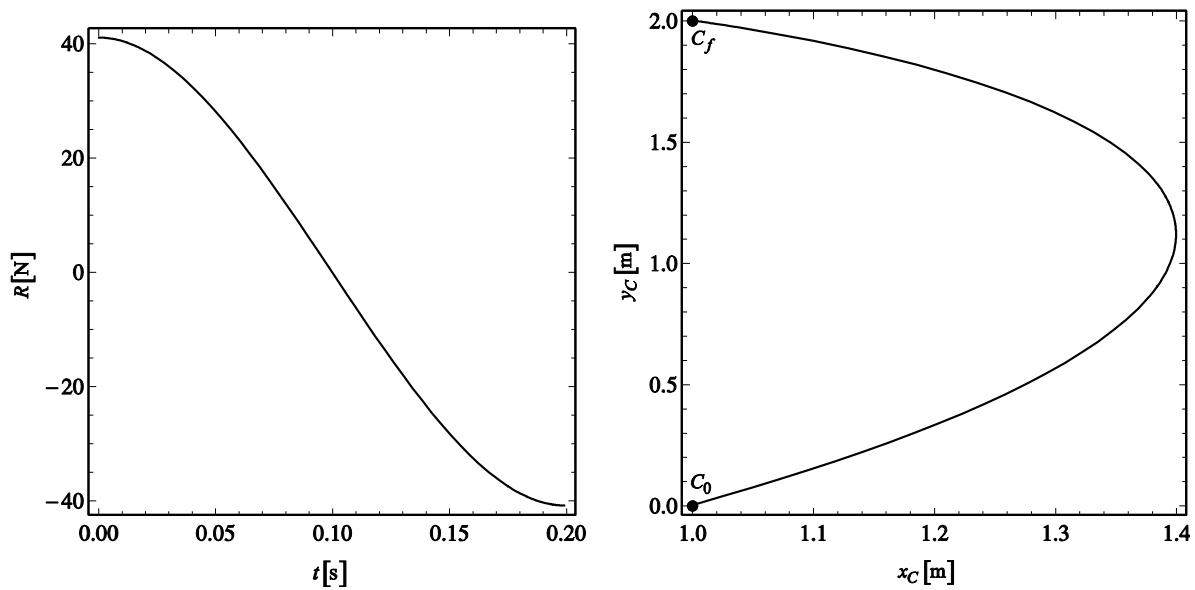


Слика 5.4 Управљачке силе F_1 и F_2 за $\varphi_f = \pi/2$

Још један од могућих начина реализације брахистохроног кретања је накнадно наметање саоницама једне холономне стационарне идеалне независне механичке везе, у складу са претходно одређеним брахистохроним кретањем, а без дејства других активних сила (видети нпр. [Šalinić, Obradović, Mitrović, 2013]). Механичка веза је реализована посредством глатке вођице чија се линија путање поклапа са трајекторијом тачке C , тако да су параметарске једначине линије вођице

$$x_C(t) = x(t) + a \cos \varphi(t), \quad y_C(t) = y(t) + a \sin \varphi(t). \quad (5.51)$$

На слици 5.5 приказани су закони промене реакције R нехолономне везе, као и трајекторија тачке C . Тачка C_0 представља почетни, док тачка C_f представља крајњи положај тачке C саоница.



Слика 5.5 Реакција R нехолономне везе и трајекторија тачке C за $\varphi_f = \pi / 2$

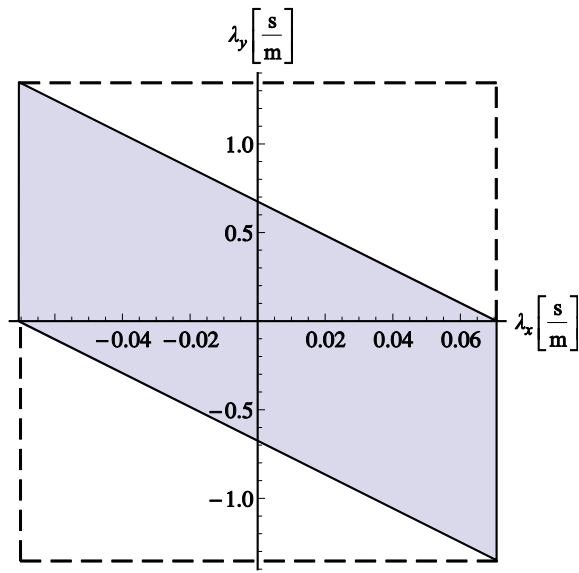
5.2.2 Случај $\varphi_f = \pi / 30$

Имајући у виду да нисмо у могућности да одредимо процену интервала вредности координате λ_y при вредности крајњег угла сечива $\varphi_f = 0$, најпре ћемо одредити процену, као и решења одговарајућег TPBVP, при блиској вредности крајњег угла сечива $\varphi_f = \pi / 30$. У овом случају, на основу (5.34) и (5.39), могу се одредити процене интервала вредности координата λ_x и λ_y у следећем облику

$$-0,0707 \leq \lambda_x \leq 0,0707, \quad -(0,6765 + 9,5144\lambda_x) \leq \lambda_y \leq 0,6765 - 9,5144\lambda_x, \quad (5.52)$$

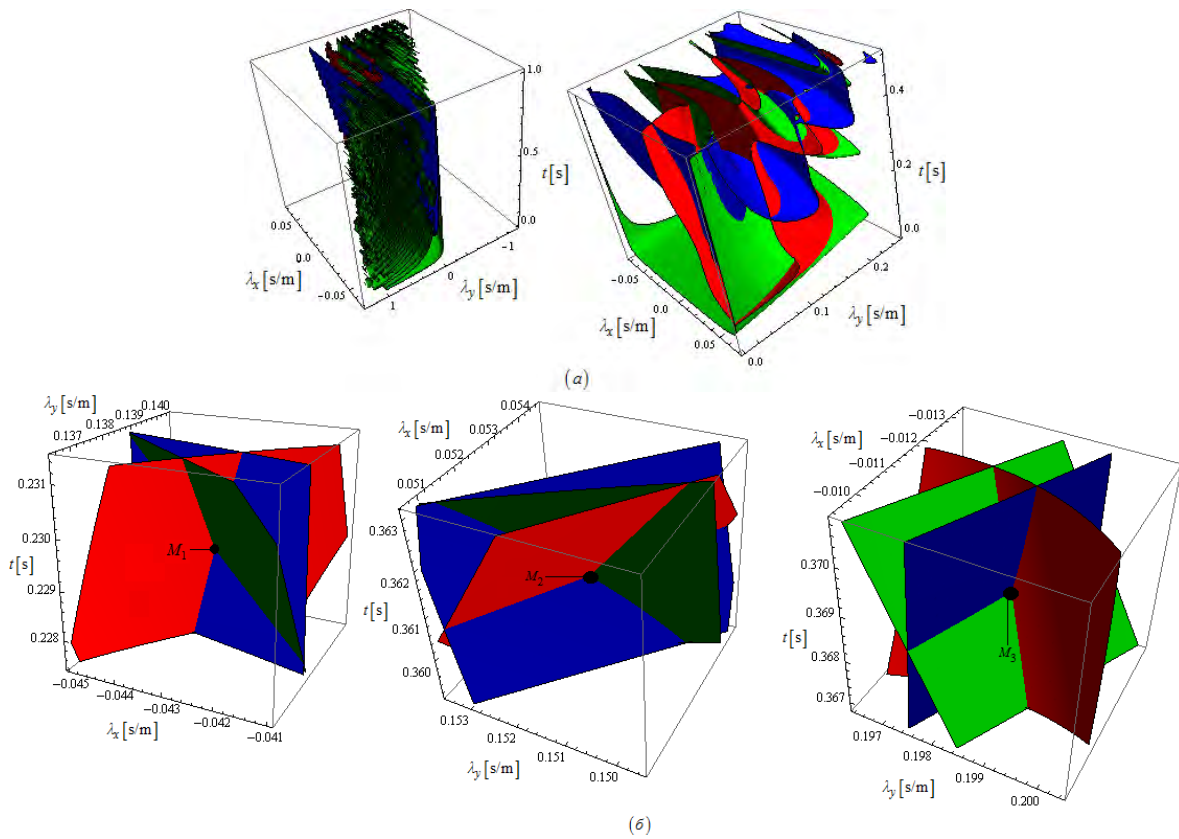
што је и графички представљено на слици 5.6. На основу (5.43), процена интервала вредности координате λ_y сада добија следећи облик

$$-1,3492 \leq \lambda_y \leq 1,3492. \quad (5.53)$$

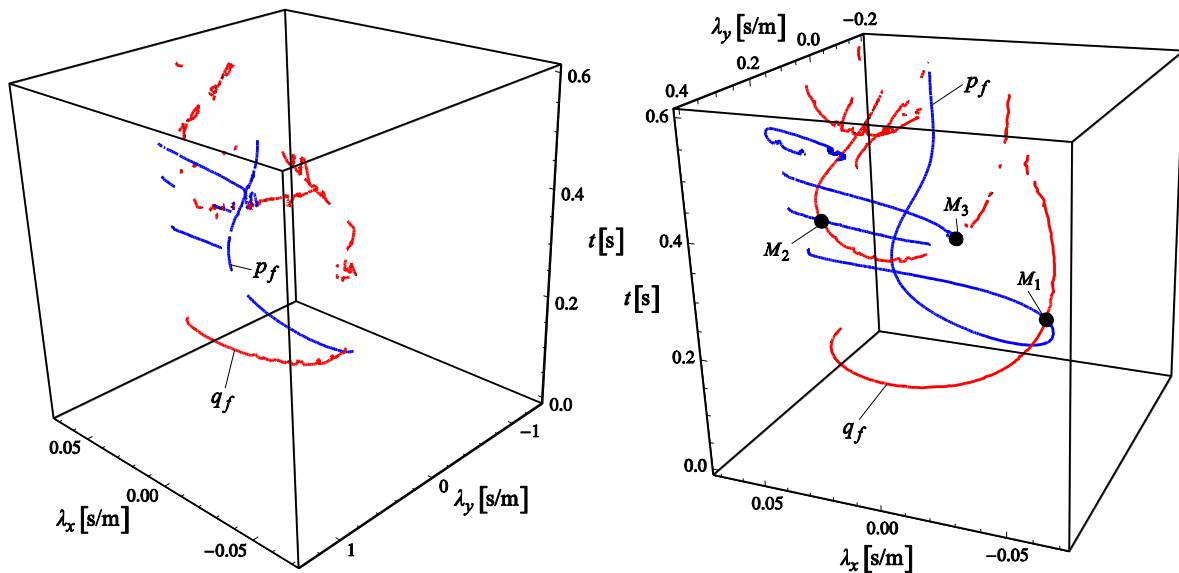


Слика 5.6 Процене интервала вредности координата λ_x и λ_y за $\varphi_f = \pi/30$

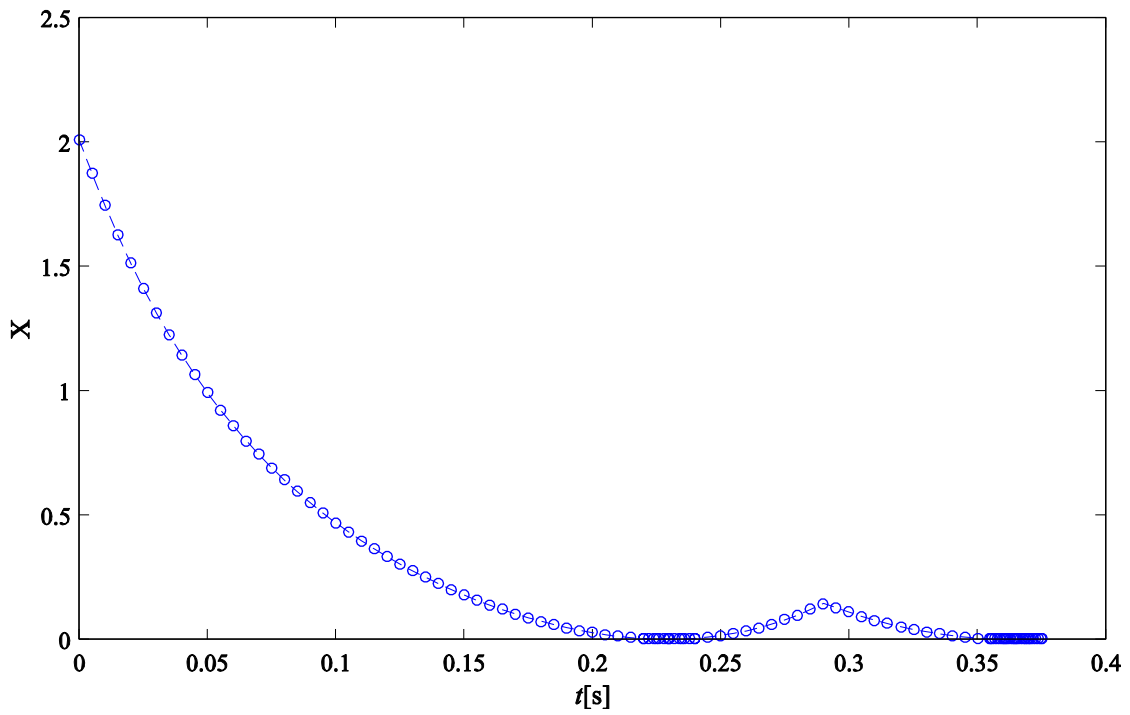
Осенчен регион на слици 5.6 одговара проценама датим у (5.52). На слици 5.7(a) приказане су површи (5.44) за $\varphi_f = \pi/30$, док су на слици 5.7(b) приказане пресечне тачке M_1, M_2 и M_3 . На слици 5.8 приказан је пресек просторних линија p_f и q_f за $\varphi_f = \pi/30$, где се јасно може уочити да решење TPBVP није јединствено. Визуелне процене координата пресечних тачака M_1, M_2 и M_3 са слике 5.7(b), односно слике 5.8 су $(0, 0.1, 0.2)$, $(0, 0.15, 0.4)$ и $(0, 0.2, 0.4)$ респективно. Графички прикази функције грешке одређене тачкама (t_{if}, X_i) , применом програма GMTTPBVP2(), дати су на сликама 5.9–5.11.



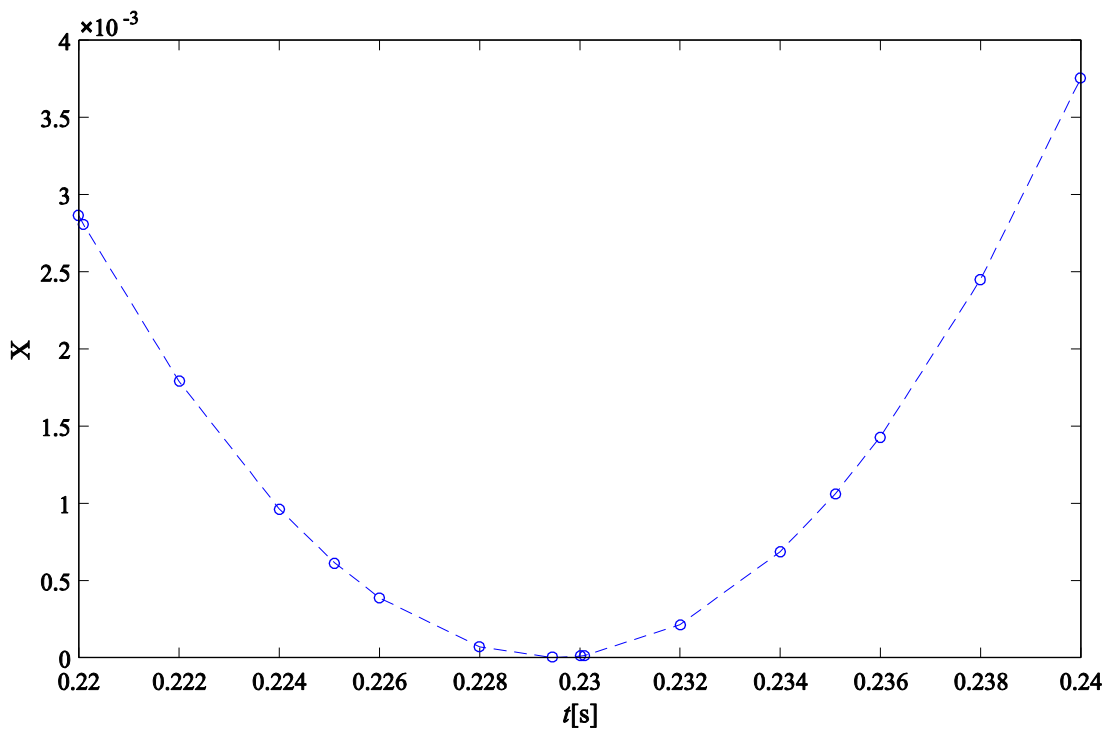
Слика 5.7 (а) Пресек површи $\Gamma_\varphi(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$, $\Gamma_x(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$ и $\Gamma_y(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$ за $\varphi_f = \pi/30$; (б) пресечне тачке M_1, M_2 и M_3



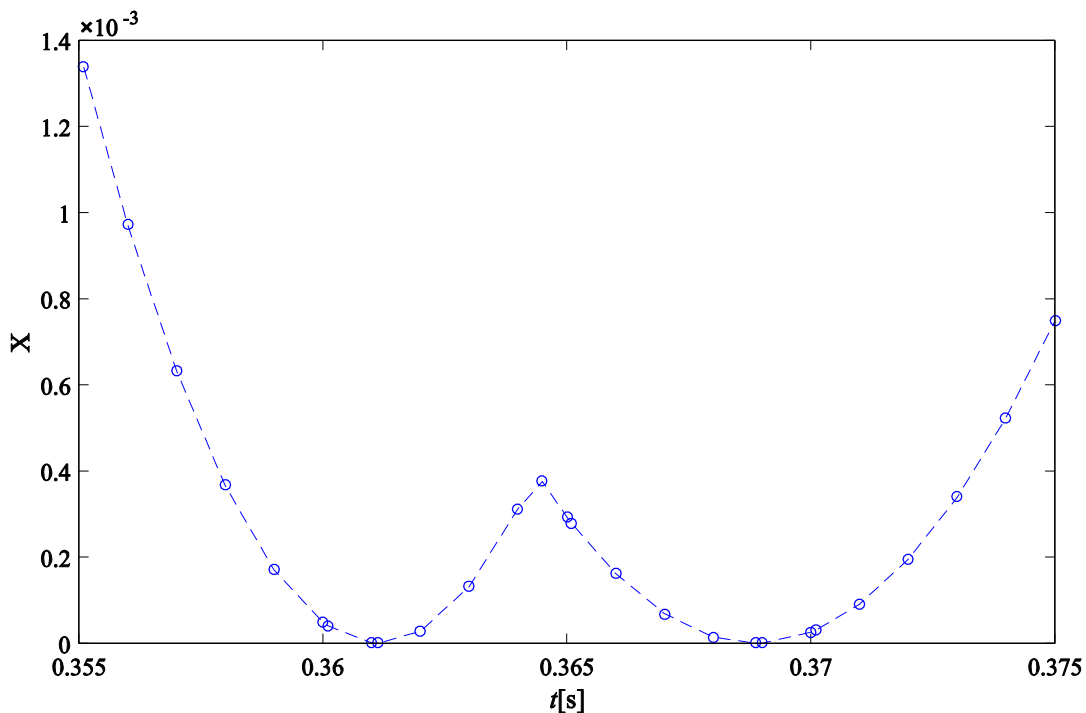
Слика 5.8 Просторне линије $p_f = f_p(\lambda_x, t_f)$ и $q_f = f_q(\lambda_x, t_f)$ за $\varphi_f = \pi/30$



Слика 5.9 Функција грешке за $\varphi_f = \pi / 30$ одређена тачкама (t_{if}, X_i) , применом програма GMTTPBVP2() у интервалу $0 \leq t \leq 0,3751s$



Слика 5.10 Глобални минимум времена кретања $(t_f = 0,229455s)$ за $\varphi_f = \pi / 30$ одређен применом програма GMTTPBVP2()



Слика 5.11 Друго и треће решење ТРВВП ($t_f = 0,361141\text{s}$ и $t_f = 0,368861\text{s}$)
одређено применом програма GMTTPBVP2()

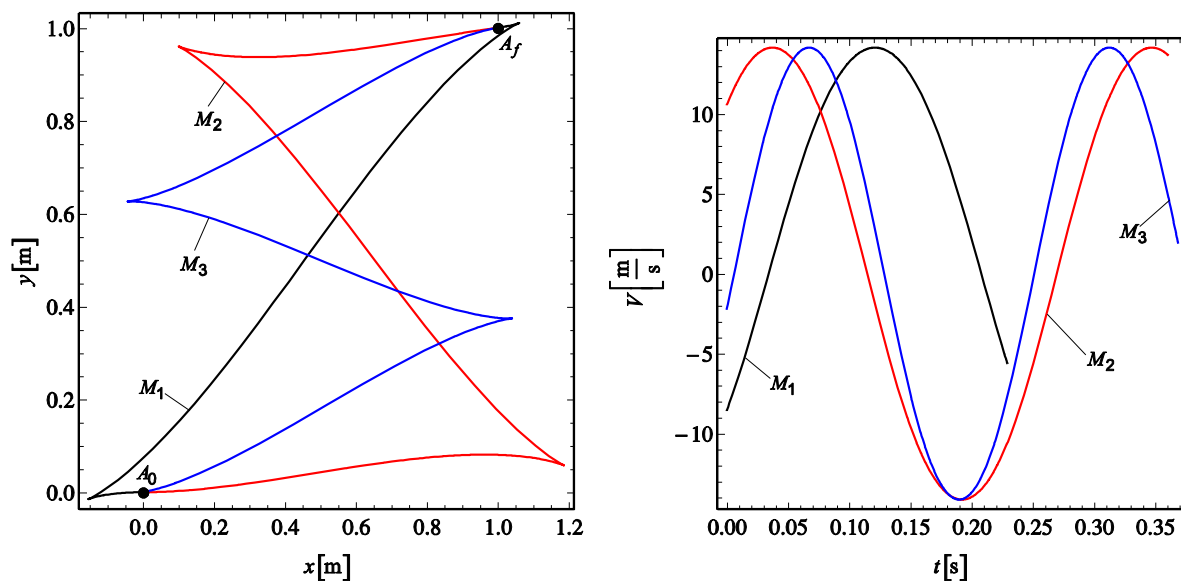
Сва решења ТРВВП за $\varphi_f = \pi/30$ у интервалу $0 \leq t \leq 0,3751\text{s}$ приказана су у табели 5.1, а која су представљена, респективно, тачкама M_1, M_2 и M_3 пресека просторних линија p_f и q_f .

Табела 5.1 Решења ТРВВП за $\varphi_f = \pi/30$

Решења	$\lambda_x [\text{s/m}]$	$\lambda_y [\text{s/m}]$	$t_f [\text{s}]$
Прво решење (M_1)	-0,042973	0,138484	0,229455
Друго решење (M_2)	0,0526389	0,151529	0,361141
Треће решење (M_3)	-0,0113855	0,198418	0,368861

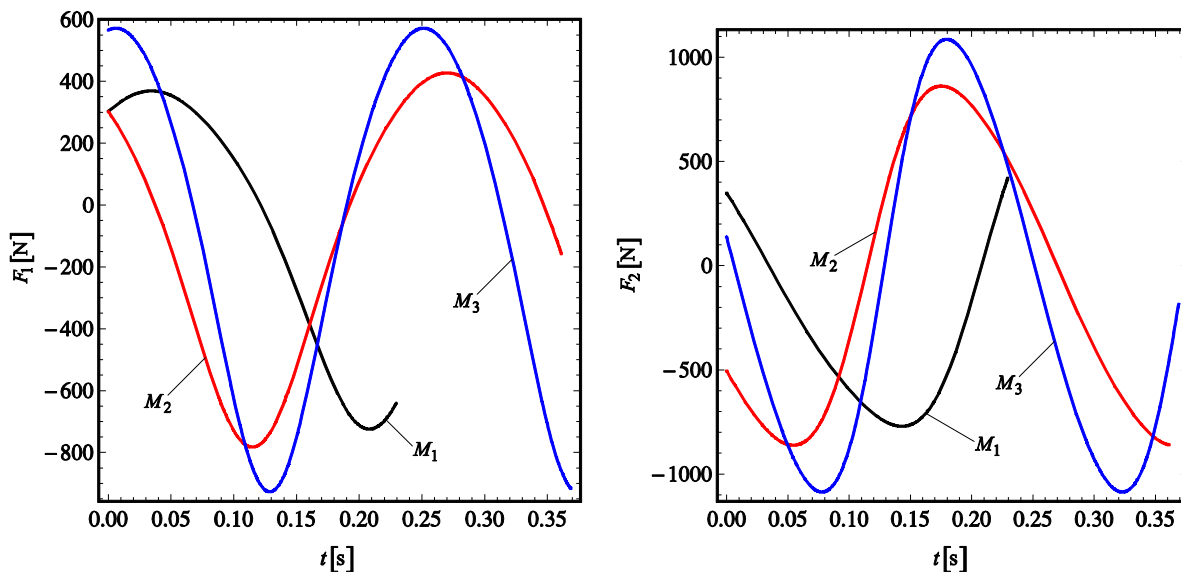
Трајекторије и брзине тачке A сечива, које одговарају решењима ТРВВП, приказане су на слици 5.12. Тачка A_0 представља почетни, док тачка A_f представља крајњи положај тачке A сечива. На основу графичког приказа функције грешке дате на слици

5.9, евидентно је да глобални минимум времена одговара првом решењу приказаног у табели 5.1 и износи $t_f = 0,229455 \text{ s}$.

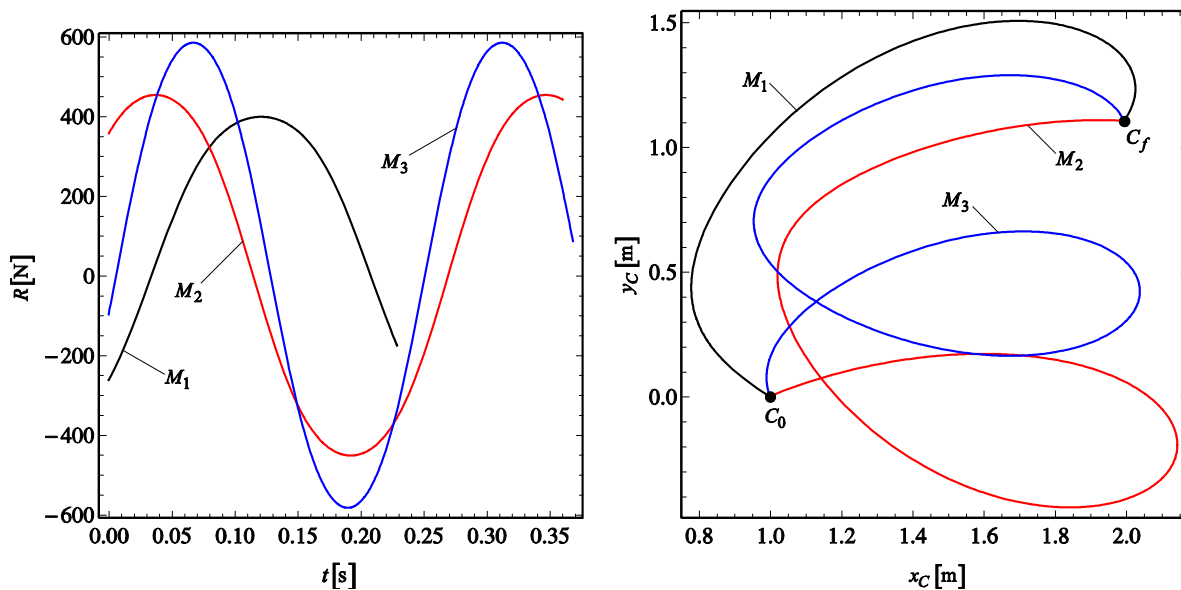


Слика 5.12 Трајекторије и брзине V тачке A сечива за $\varphi_f = \pi/30$

На слици 5.13 приказани су закони промене управљачких сила F_1 и F_2 , док су на слици 5.14 приказани закони промене реакције R нехолономне везе, као и трајекторије тачке C , за решења приказана у табели 5.1.



Слика 5.13 Управљачке силе F_1 и F_2 за $\varphi_f = \pi/30$



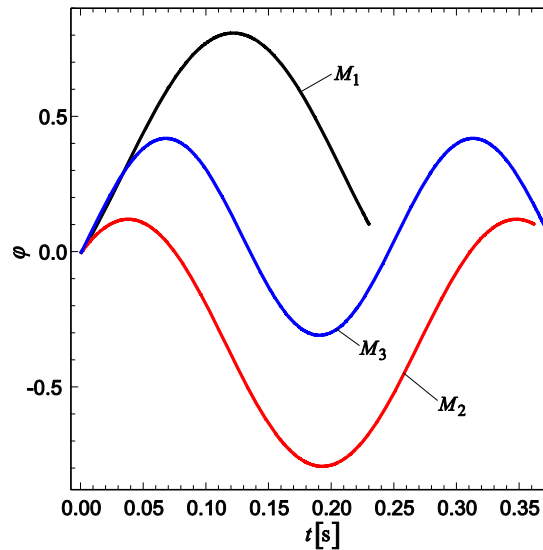
Слика 5.14 Реакција R нехолономне везе и трајекторија тачке C за $\varphi_f = \pi/30$

Како смо сада у могућности да одредимо законе промене угла φ (слика 5.15) за свако од решења TPBVP, односно минималну вредност скупа бројева одређених максималним вредностима угла за свако од решења TPBVP

$$\varphi^* = \min \{0.810301, 0.790842, 0.421075\} = 0,421075, \quad (5.54)$$

процена интервала вредности координате λ_y , као што је речено, сада се може одредити на основу (5.42)

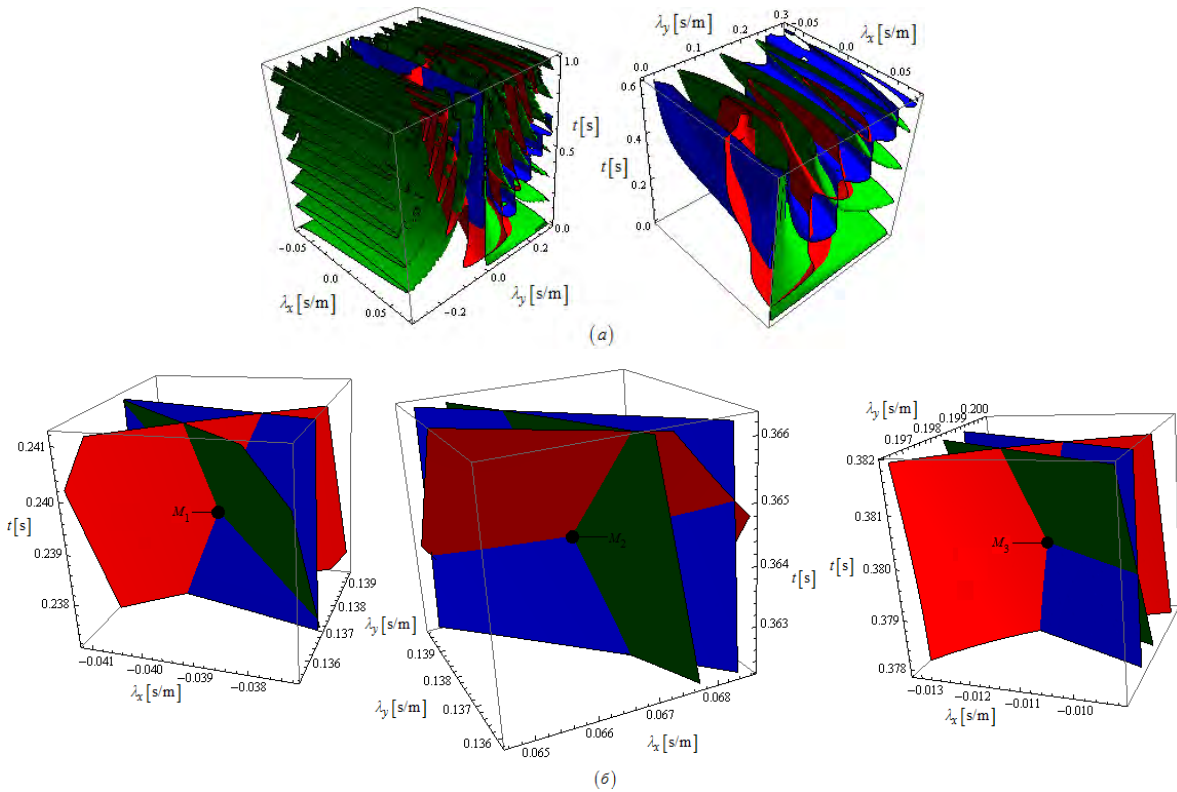
$$-0,330881 \leq \lambda_y \leq 0,330881. \quad (5.55)$$



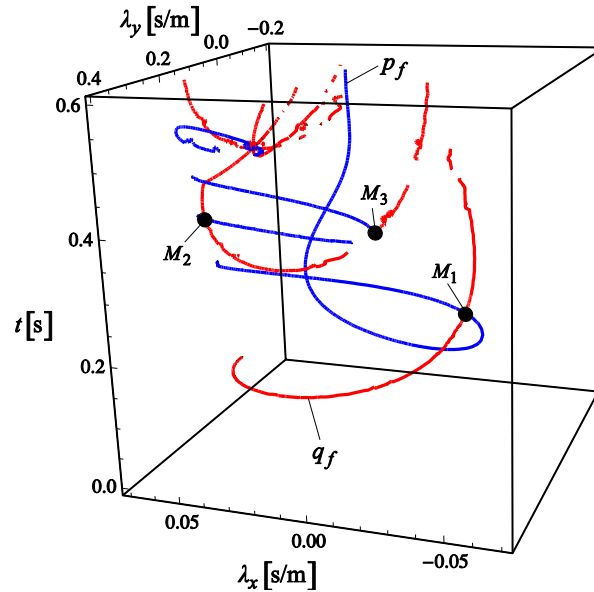
Слика 5.15 Угао φ за $\varphi_f = \pi/30$

5.2.3 Случај $\varphi_f = 0$

Како се за вредност крајњег угла сечива $\varphi_f = 0$ процена интервала вредности координате λ_y не може одредити на основу (5.43), у овом случају, имајући у виду да су положаји сечива одређени крајњим угловима $\varphi_f = 0$ и $\varphi_f = \pi/30$ међусобно блиски, можемо претпоставити да се и решења ТРВРП неће умногоме разликовати. У овом случају, користиће се процене дате у (5.53), односно (5.55). На слици 5.16(a) приказане су површи (5.44) за $\varphi_f = 0$, док су на слици 5.16(b) приказане пресечне тачке M_1, M_2 и M_3 . На слици 5.17 приказане су просторне линије p_f и q_f за $\varphi_f = 0$, где се јасно може уочити да решење ТРВРП такође није јединствено. Визуелне процене координата пресечних тачака M_1, M_2 и M_3 са слике 5.16(b), односно слике 5.17 су $(0, 0.15, 0.2)$, $(0, 0.15, 0.4)$ и $(0, 0.2, 0.4)$ респективно. Сва решења ТРВРП у интервалу $0 \leq t \leq 0,385s$ приказана су у табели 5.2, а која су представљена, респективно, тачкама пресека M_1, M_2 и M_3 просторних линија p_f и q_f .



Слика 5.16 (а) Пресек површи $\Gamma_\varphi(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$, $\Gamma_x(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$ и $\Gamma_y(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$ за $\varphi_f = 0$;
 (б) пресечне тачке M_1, M_2 и M_3

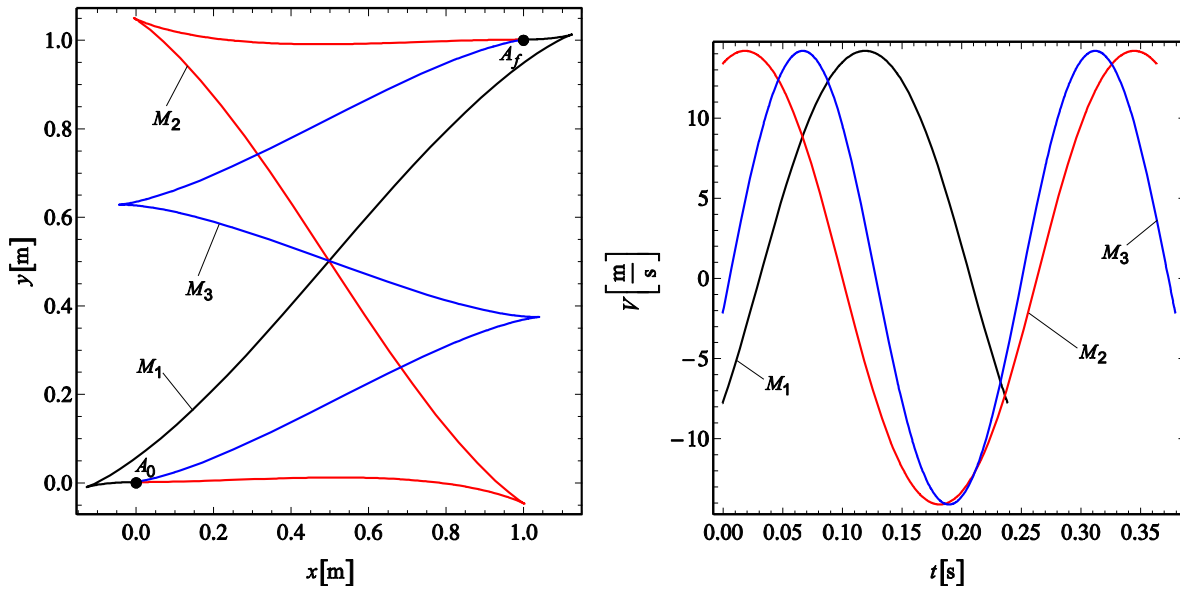


Слика 5.17 Просторне линије $p_f = f_p(\lambda_x, t_f)$ и $q_f = f_q(\lambda_x, t_f)$ за $\varphi_f = 0$

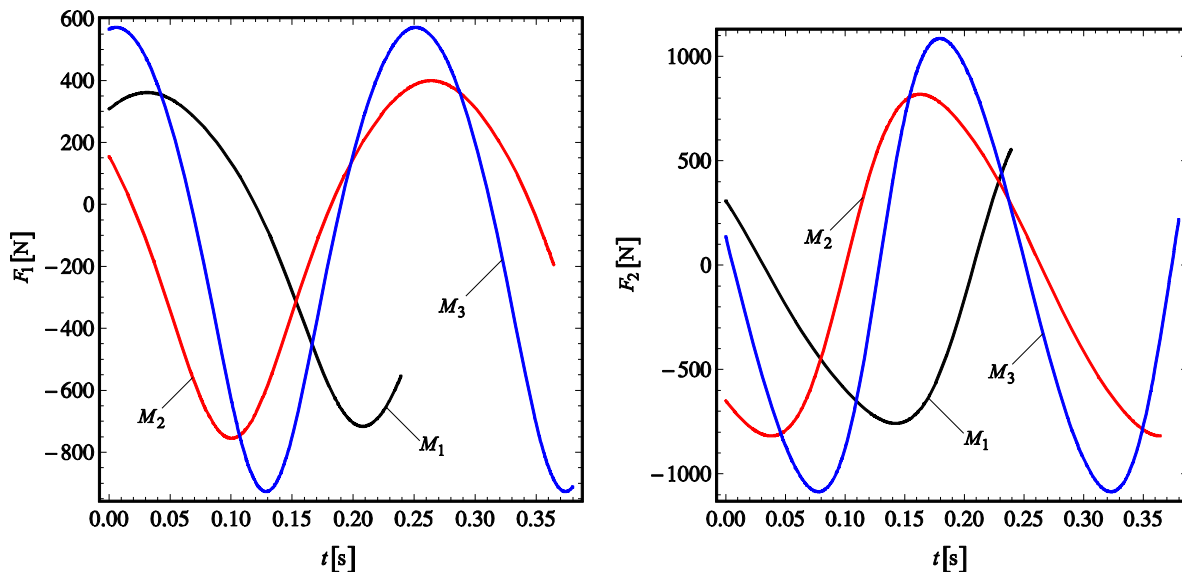
Табела 5.2 Решења ТРВРР за $\varphi_f = 0$

Решења	λ_x [s/m]	λ_y [s/m]	t_f [s]
Прво решење (M_1)	-0,0391831	0,137402	0,239187
Друго решење (M_2)	0,0666096	0,137803	0,364262
Треће решење (M_3)	-0,0111406	0,198342	0,379927

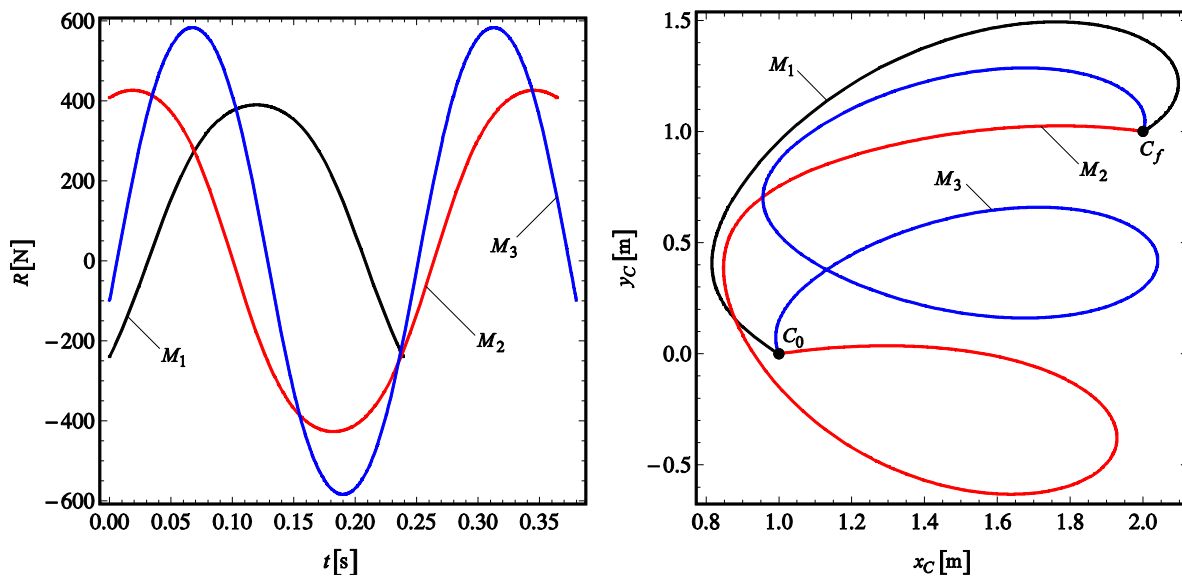
На основу приказаних решења ТРВРР за $\varphi_f = 0$ у табели 5.2, можемо закључити да глобални минимум времена одговара првом решењу и износи $t_f = 0,239187$ s.



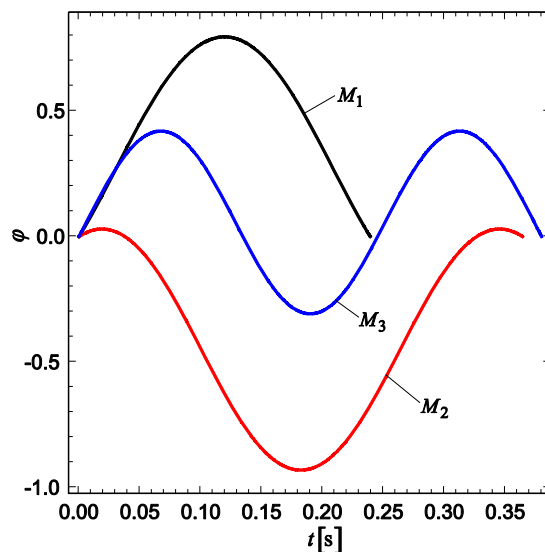
Слика 5.18 Трајекторије и брзине V тачке A сечива за $\varphi_f = 0$



Слика 5.19 Управљачке силе F_1 и F_2 за $\varphi_f = 0$



Слика 5.20 Реакција R нехолономне везе и трајекторија тачке C за $\varphi_f = 0$



Слика 5.21 Угао φ за $\varphi_f = 0$

Како је за $\varphi_f = 0$,

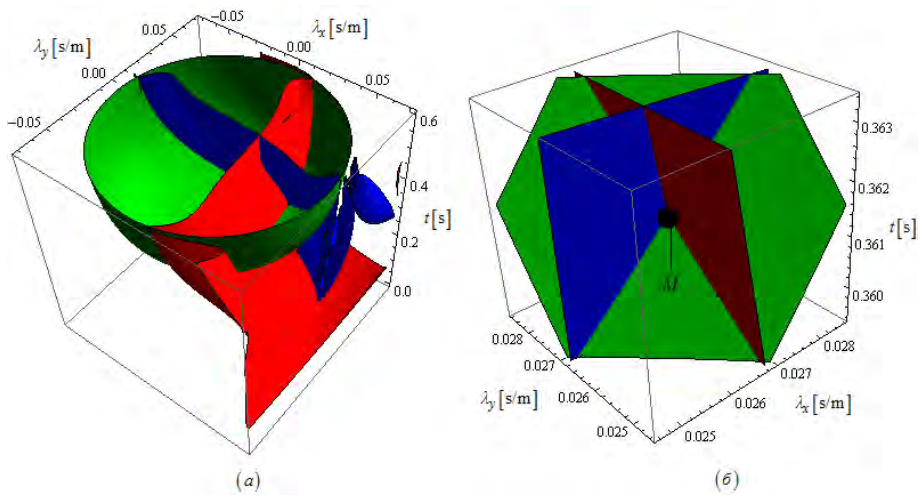
$$\varphi^* = \min\{0.795514, 0.930492, 0.420037\} = 0,420037, \quad (5.56)$$

процена интервала вредности координате λ_y је

$$-0,331723 \leq \lambda_y \leq 0,331723.$$

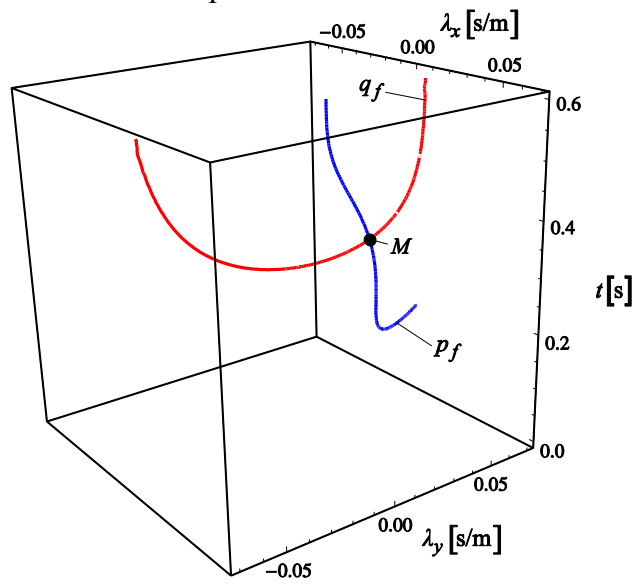
5.2.4 Случај $\varphi_f = \pi$

Као што је речено, при вредности крајњег угла сечива $\varphi_f = \pi$ не може се одредити процена интервала вредности координате λ_y . У овом случају, користиће се процене дате у (5.49). Имајући у виду да се одговарајуће површи, односно просторне криве секу само у једној тачки (видети слике 5.22 и 5.23), можемо тврдити да је добијено решење ТРВРР за случај $\varphi_f = \pi$ у интервалу $0 \leq t \leq 0,6$ s јединствено. Визуелне процене координата пресечне тачке M са слике 5.22(б) су $(0,0,0.3)$. Непознате граничне вредности ТРВРР за случај $\varphi_f = \pi$ су: $t_f = 0,199832$ s, $\lambda_x = 0,0303507$ s/m и $\lambda_y = 0,0303507$ s/m.

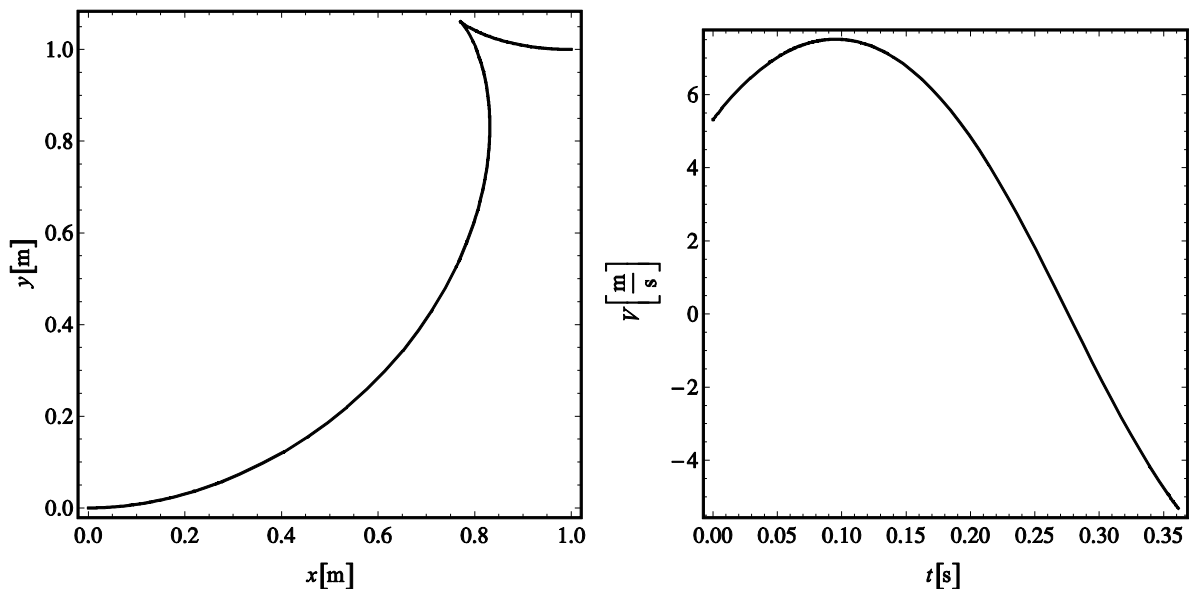


Слика 5.22 (а) Површи $\Gamma_\varphi(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$, $\Gamma_x(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$ и $\Gamma_y(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$ за $\varphi_f = \pi$; (б)

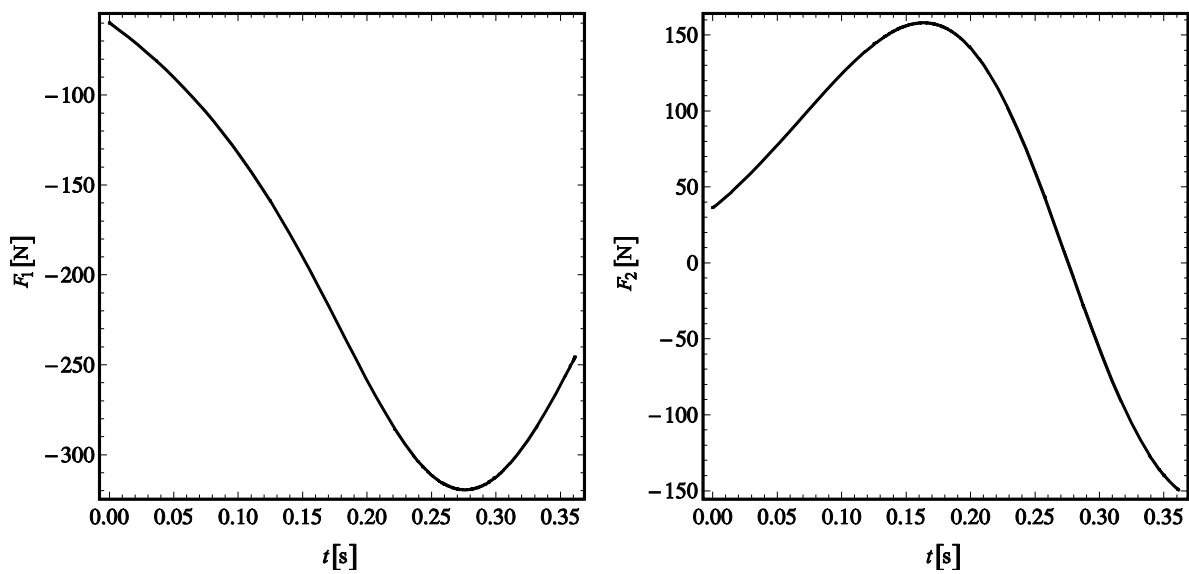
пресечна тачка M



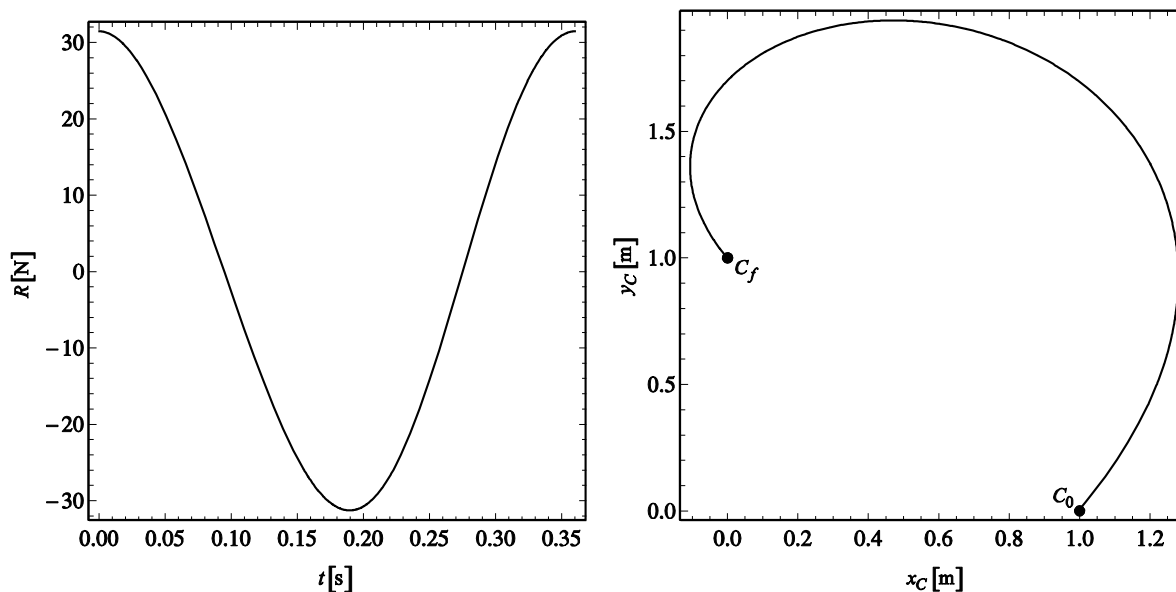
Слика 5.23 Просторне линије $p_f = f_p(\lambda_x, t_f)$ и $q_f = f_q(\lambda_x, t_f)$ за $\varphi_f = \pi$



Слика 5.24 Трајекторија и брзина V тачке A сечива за $\varphi_f = \pi$



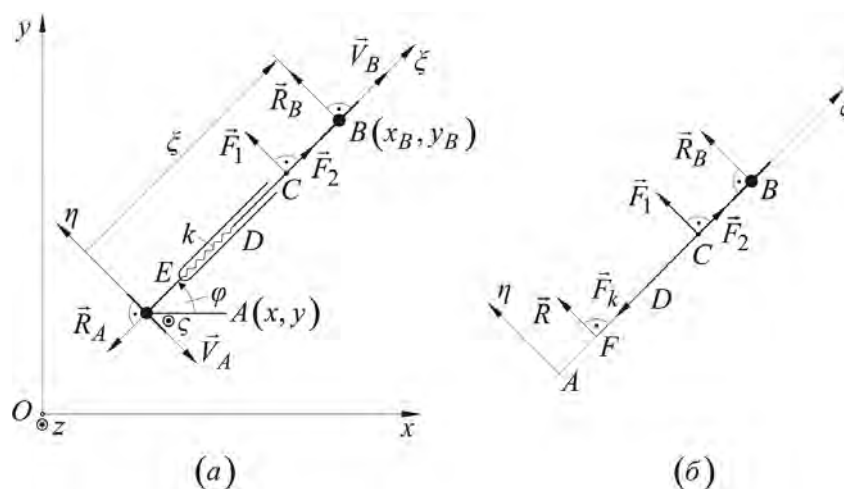
Слика 5.25 Управљачке силе F_1 и F_2 за $\varphi_f = \pi$



Слика 5.26 Реакција R нехолономне везе и трајекторија тачке C за $\varphi_f = \pi$

5.3 Нумерички пример 2

Разматра се нехолономни механички систем са управним брзинама, приказан на слици 5.24 (детаљан опис разматраног система дат је Поглављу 1). Материјалне тачке A и B , сада су једнаких маса m , док у тачки C , лаког штапа BD , дејствује сила $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, где су $\vec{F}_1 = F_1 \vec{\mu}$ и $\vec{F}_2 = F_2 \vec{\lambda}$.



Слика 5.27 (а) Нехолономни механички систем са управним брзинама; (б) лаки штап BD

Релација ограничења (5.10), у складу са (1.227), има следећи облик

$$\Phi = \frac{1}{2}m(V_A^2 + V_B^2) + \frac{1}{2}k\left[(\xi - l_0 - L)^2 - (\xi(t_0) - l_0 - L)^2\right] - E_0 = 0, \quad (5.57)$$

где је $E_0 \in \mathbb{R}$ механичка енергија система у почетном тренутку $t_0 = 0$. За управљачке променљиве u^1 и u^2 респективно су узете брзине тачака A и B система

$$\dot{\pi}^1 = V_A = u^1, \quad \dot{\pi}^2 = V_B = u^2, \quad (5.58)$$

где су $V_A = \vec{V}_A \cdot \vec{\mu}$ и $V_B = \vec{V}_B \cdot \vec{\lambda}$. Све генерализане брзине, на основу (1.226), могу се изразити у функцији независних квазибрзина

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\xi}V_A, \quad \dot{\xi} = V_B, \quad \dot{x} = \sin \varphi V_A, \quad \dot{y} = -\cos \varphi V_A. \quad (5.59)$$

Почетни положај (5.8), као и крајњи положај (5.9) система респективно су одређени следећим вредностима генерализаних координата

$$t_0 = 0, \quad \varphi(t_0) = 0, \quad \xi(t_0) = \xi_0, \quad x(t_0) = 0, \quad y(t_0) = 0, \quad (5.60)$$

$$t = t_f, \quad \varphi(t_f) = \varphi_f, \quad \xi(t_f) = \xi_f, \quad x(t_f) = x_f, \quad y(t_f) = y_f. \quad (5.61)$$

За $\lambda_0 = -1$, Лагранжев множител μ према (5.14) је

$$\mu = \frac{1}{2E_0}. \quad (5.62)$$

Екстремална управљања u^1 и u^2 , на основу (5.15), (5.57) и (5.59), имају следећи облик

$$u^1 = \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \left(\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi + \frac{\lambda_\varphi}{\xi} \right), \quad (5.63)$$

$$u^2 = \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \lambda_\xi,$$

где су $\omega^2 = k/m$, $\lambda_\varphi = \lambda_1$, $\lambda_\xi = \lambda_2$, $\lambda_x = \lambda_3$, $\lambda_y = \lambda_4$, $\Delta l = \xi - l_0 - L$ и $\Delta l_0 = \xi_0 - l_0 - L$.

Диференцијалне једначине основног и спрегнутог систем, на основу (5.18), (5.19) и (5.57), имају следећи облик

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \left(\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi + \frac{\lambda_\varphi}{\xi} \right) \frac{1}{\xi}, \\
\dot{\xi} &= \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \lambda_\xi, \\
\dot{x} &= \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \left(\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi + \frac{\lambda_\varphi}{\xi} \right) \sin \varphi, \\
\dot{y} &= - \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \left(\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi + \frac{\lambda_\varphi}{\xi} \right) \cos \varphi, \\
\dot{\lambda}_\varphi &= - \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \left(\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi + \frac{\lambda_\varphi}{\xi} \right) (\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi), \\
\dot{\lambda}_\xi &= \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \left(\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi + \frac{\lambda_\varphi}{\xi} \right) \frac{\lambda_\varphi}{\xi^2} - \frac{\omega^2 \Delta l}{\left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right]}, \\
\dot{\lambda}_x &= 0, \\
\dot{\lambda}_y &= 0,
\end{aligned} \tag{5.64}$$

где су $\lambda_x = \text{const.}$ и $\lambda_y = \text{const.}$. Квадратна форма (5.23) сада има следећи облик

$$\frac{1}{\xi_0^2} \lambda_{\varphi 0}^2 + \lambda_{\xi 0}^2 + \lambda_y^2 - \frac{2}{\xi_0} \lambda_{\varphi 0} \lambda_y = \frac{m}{2E_0}, \tag{5.65}$$

односно

$$\xi_0^2 \lambda_{\xi 0}^2 + (\lambda_y \xi_0 - \lambda_{\varphi 0})^2 = \frac{\xi_0^2 m}{2E_0}. \tag{5.66}$$

У овом примеру, може се одредити процена интервала вредности координате $\lambda_{\xi 0}$

$$-\sqrt{\frac{m}{2E_0}} \leq \lambda_{\xi 0} \leq \sqrt{\frac{m}{2E_0}}, \tag{5.67}$$

док се из (5.66), $\lambda_{\varphi 0}$ може изразити у следећем облику

$$\lambda_{\varphi 0} = \xi_0 \left(\lambda_y \pm \sqrt{\frac{m}{2E_0} - \lambda_{\xi 0}^2} \right). \tag{5.68}$$

На основу квадратне форме (5.57), може се одредити домен дефинисаности управљања u^1 и u^2 респективно

$$-\sqrt{\frac{2E_0}{m}} \leq u^1 \leq \sqrt{\frac{2E_0}{m}}, \quad (5.69)$$

$$-\sqrt{\frac{2E_0}{m}} \leq u^2 \leq \sqrt{\frac{2E_0}{m}}. \quad (5.70)$$

Интервал вредности крутости опруге ($0 \leq k \leq k_{max}$), за који постоје решења TPBVP, може се такође одредити на основу (5.57)

$$0 \leq k \leq \frac{2E_0}{(\Delta l_f^2 - \Delta l_0^2)}, \quad (5.71)$$

где је $\Delta l_f = \xi_f - l_0 - L$, док је максимална вредност крутости опруге $k_{max} = 2E_0 / (\Delta l_f^2 - \Delta l_0^2)$ одређена из услова да је укупна механичка енергија система у почетном тренутку $t_0 = 0$ једнака потенцијалној енергији деформације опруге у крајњем положаја система. На основу (5.63), (5.69) и (5.70), следеће двојне неједнакости могу бити успостављене

$$\begin{aligned} -\sqrt{\frac{2E_0}{m}} &\leq \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \left(\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi + \frac{\lambda_\varphi}{\xi} \right) \leq \sqrt{\frac{2E_0}{m}}, \\ -\sqrt{\frac{2E_0}{m}} &\leq \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \lambda_\xi \leq \sqrt{\frac{2E_0}{m}}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

На основу (5.66) и (5.72), евидентно је да се процене интервала вредности координата λ_x, λ_y и $\lambda_{\varphi 0}$ спрегнутог вектора у овом случају не могу одредити, па самим тим и тврдити да оно решење TPBVP, за случај вишеструких решења, које одговара минималном крајњем тренутку представља оптимално решење.

Решења TPBVP одредићемо за следеће вредности параметара

$$\begin{aligned} E_0 &= 60 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}, \quad m = 60\text{kg}, \quad l_0 = 0,5\text{m}, \quad L = 0,5\text{m}, \\ \varphi_f &= \pi / 2, \quad \xi_f = 3\text{m}, \quad x_f = 1,5\text{m}, \quad y_f = -1\text{m}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

У табели 5.3 приказана су решења TPBVP за различите вредности крутости опруге у складу са (5.71) и (5.73), при вредности почетног положаја материјалне тачке B $\xi_0 = 1\text{m}$.

Табела 5.3 Решења TPBVP при различитим вредностима крутости опруге $0 \leq k \leq 30$ ($\xi_0 = 1\text{m}$)

k [N/m]	λ_x [s/m]	λ_y [s/m]	λ_{ξ_0} [s/m]	t_f [s]
0	0,753728	1,123735	-0,614349	2,300840
10	0,875557	1,221360	-0,627508	2,413192
20	1,059933	1,365161	-0,646431	2,587913
30	1,410859	1,626805	-0,677559	3,206081

Диференцијалне једначине кретања система биће формиране на основу општих теорема динамике, односно, на основу теореме о промени количине кретања, као и теореме о промени момента количине кретања за покретну тачку A

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}_R^s, \quad \frac{d\vec{L}_A}{dt} + \vec{V}_A \times \vec{K} = \vec{M}_A^s. \quad (5.74)$$

Векторским једначинама (5.74) одговарају следеће скаларне диференцијалне једначине у односу на осе $A\xi$, $A\varepsilon$ и $A\delta$ покретног координатног система $A\xi\varepsilon\delta$ респективно

$$m(V_A\dot{\phi} + \dot{V}_B) = F_2 - R_A, \quad m(V_B\dot{\phi} - \dot{V}_A) = F_1 + R_B, \quad mV_AV_B = R_B\xi + F_1(\xi - \overline{BC}). \quad (5.75)$$

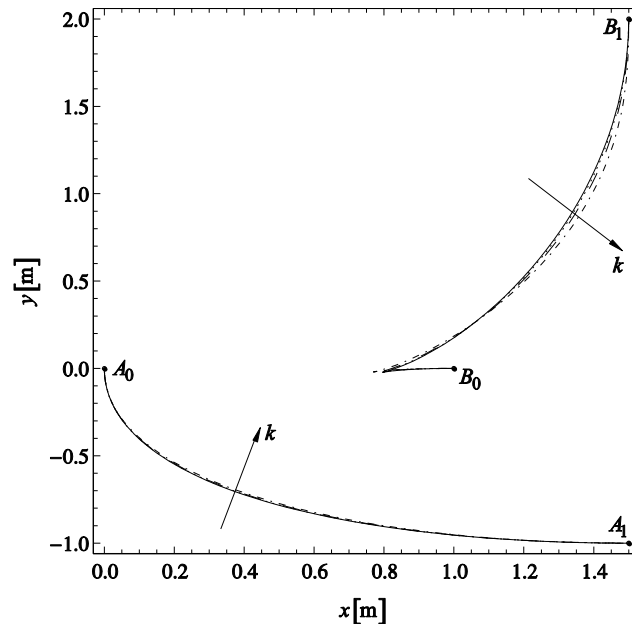
Користећи теорему о промени количине кретања, као и теорему о промени момента количине кретања за покретну тачку B , формиране су диференцијалне једначине кретања за лаки штап BD (видети слику 5.27), у односу на осе $A\xi$, $A\varepsilon$ и $A\delta$ респективно

$$m\dot{V}_B = F_2 - k(\xi - l_0 - L), \quad mV_B\dot{\phi} = R_B + F_1 + R, \quad R\overline{BF} + F_1\overline{BC} = 0, \quad (5.76)$$

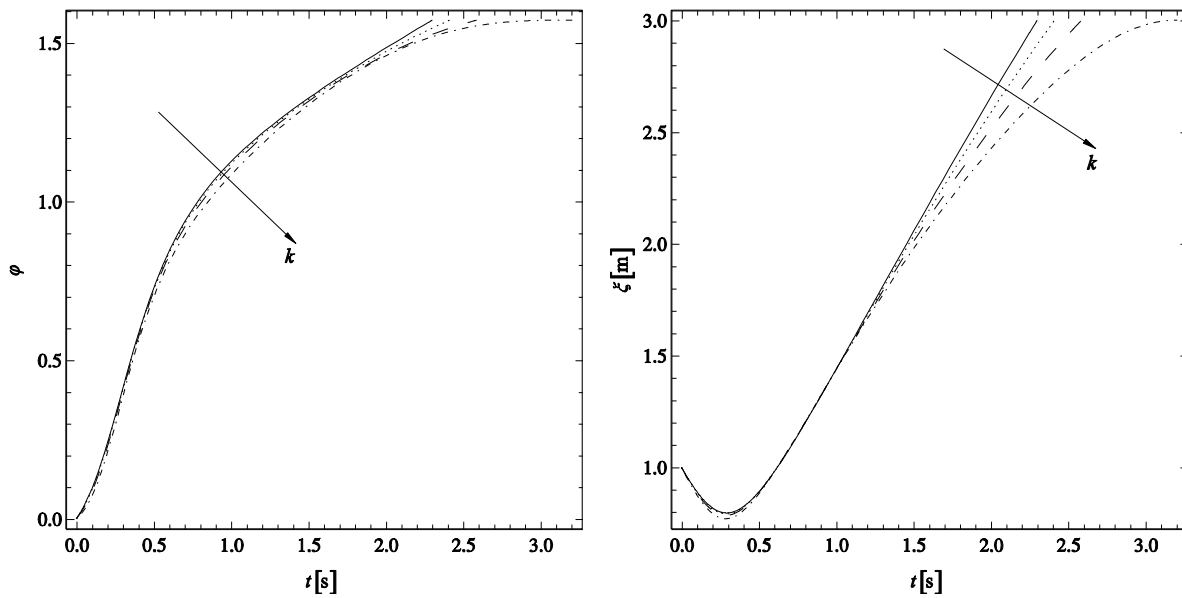
где је R пројекција резултанте система унутрашњих сила на осу $A\varepsilon$. Решавањем система једначина (5.75) и (5.76), одређују се закони промене реакција R_A и R_B нехолономних веза, управљачких сила F_1 и F_2 , резултанте R , као и положај нападне тачке \overline{BF} резултанте, у функцији дефинисаних величина и њихових извода

$$\begin{aligned}
 R_A &= k(\zeta - l_0 - L) - m \frac{V_A^2}{\zeta}, & R_B &= m \left[\frac{V_A V_B}{\zeta} + \frac{\dot{V}_A}{BC} (\zeta - \overline{BC}) \right], \\
 F_1 &= -m \frac{\ddot{\zeta}}{BC} \dot{V}_A, & F_2 &= m \dot{V}_B + k(\zeta - l_0 - L), \\
 R &= m \dot{V}_A, & \overline{BF} &= \zeta.
 \end{aligned}
 \tag{5.77}$$

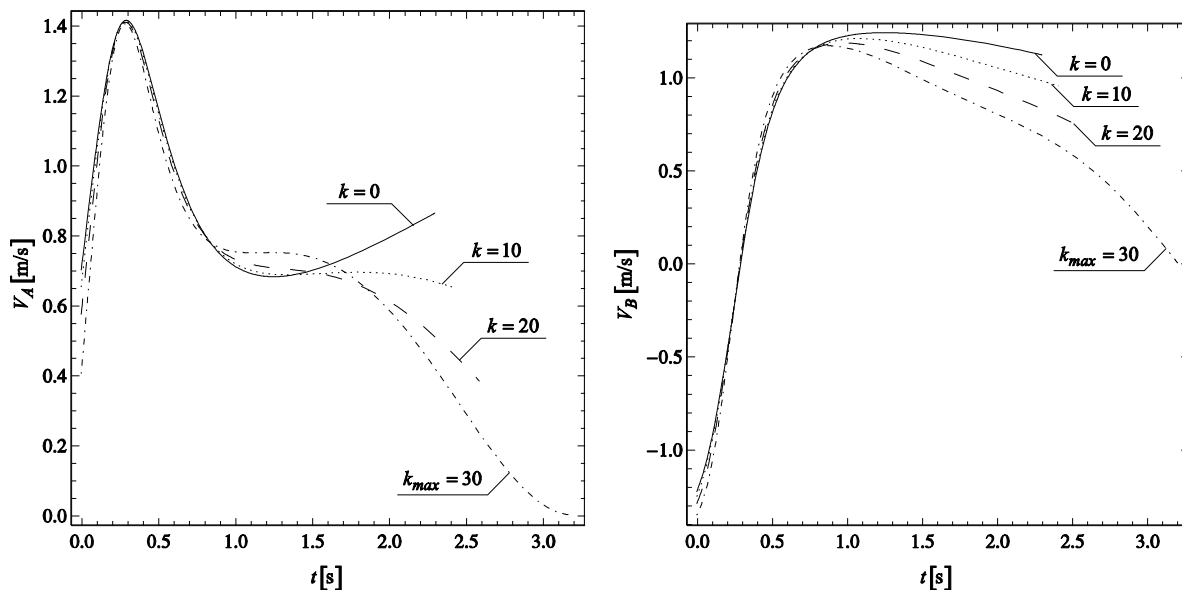
На сликама 5.28–5.32 приказани су закони промене генерализаних координата, брзина V_A и V_B , реакција R_A и R_B нехолономних веза и управљачких сила F_1 и F_2 при различитим вредностима крутости опруге у складу са (5.64) и (5.77).



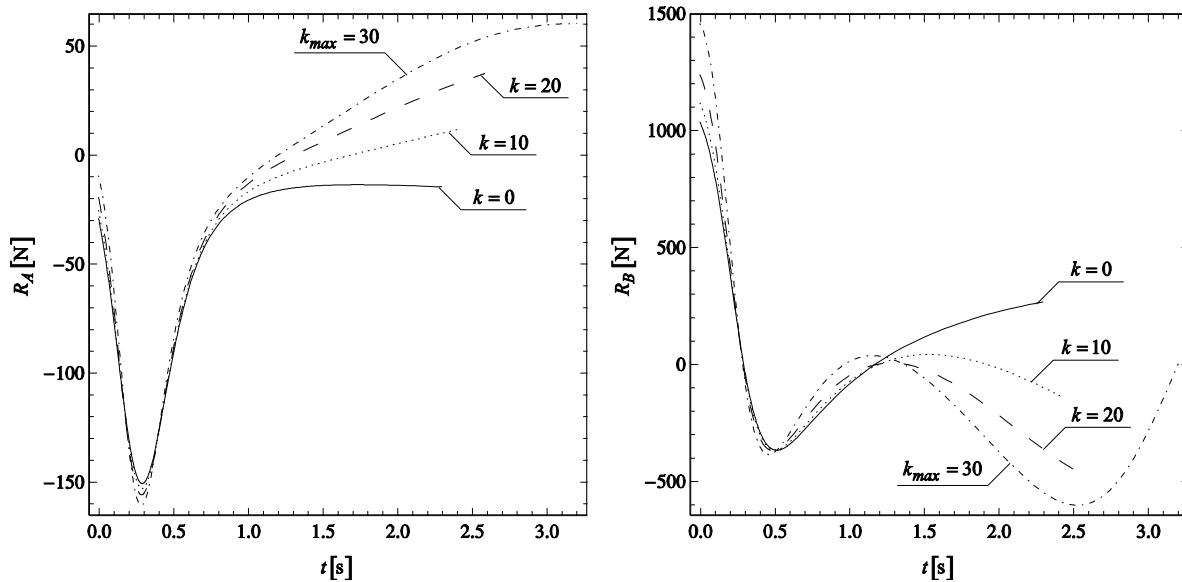
Слика 5.28 Трајекторије материјалних тачака A и B



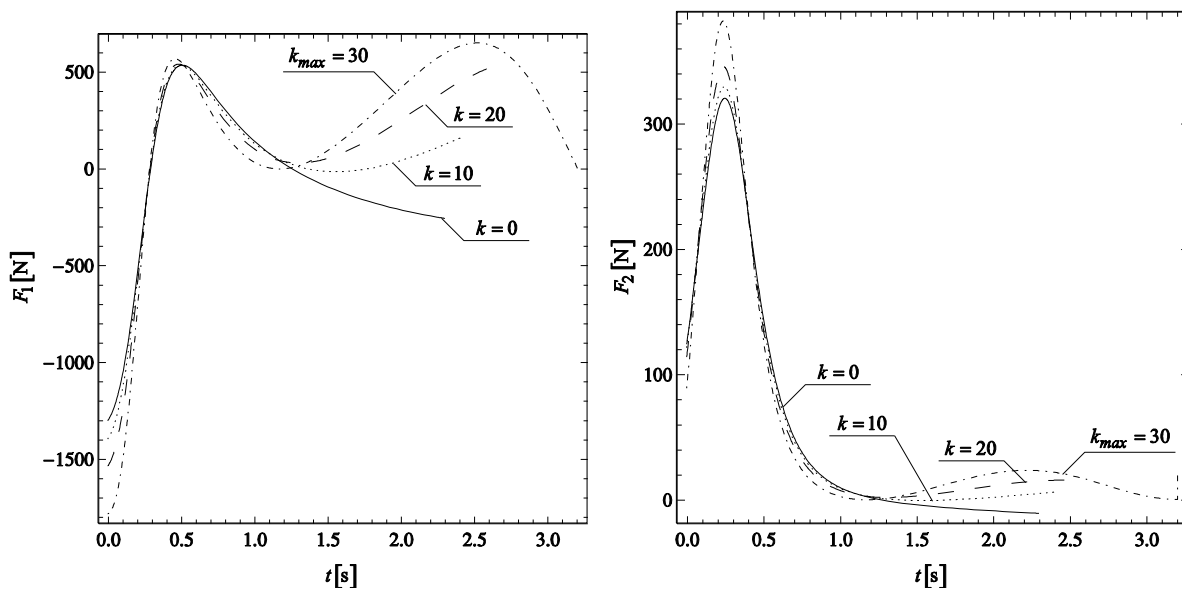
Слика 5.29 Генерализане координате φ и ζ



Слика 5.30 Брзине V_A и V_B



Слика 5.31 Реакције R_A и R_B нехолономних веза

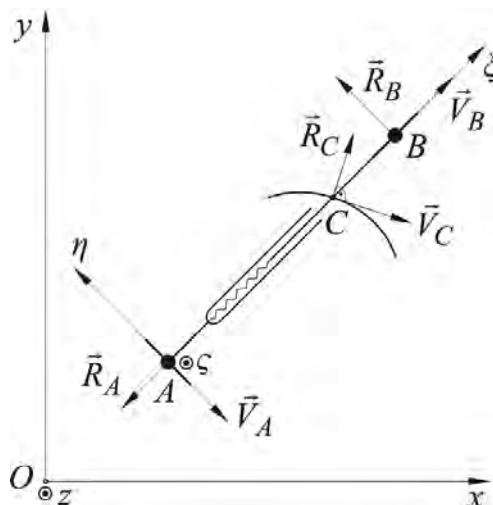


Слика 5.32 Управљачке силе F_1 и F_2

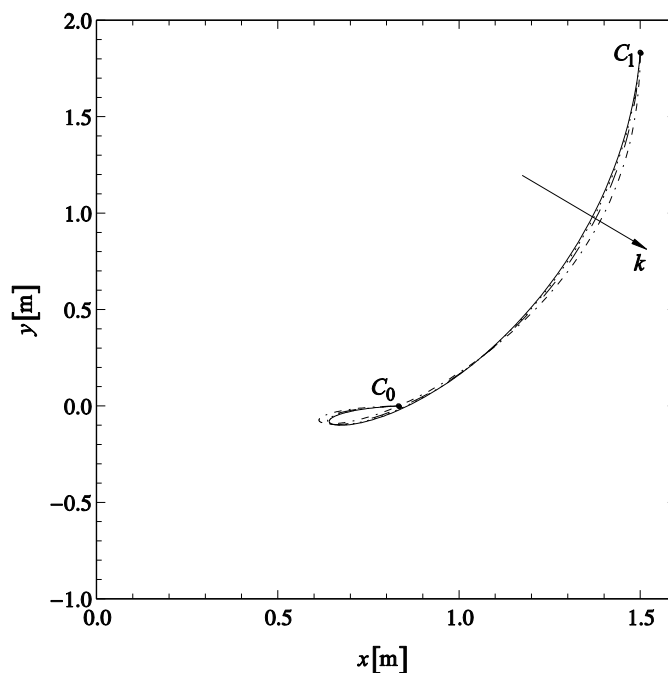
Још један од могућих начина реализације кретања разматраног система са два степена слободe кретања је накнадно наметање систему једне холономне стационарне идеалне независне механичке везе у складу са претходно одређеним брахистохроним кретањем, а без дејства управљачке силе \vec{F} . Механичка веза је реализована посредством глатке вођице чија се линија путање поклапа са

трајекторијом тачке C , која се налази на растојању $\overline{BC}=1/6\text{m}$, тако да су параметарске једначине линије вођице

$$x_C(t) = x(t) + (\zeta(t) - \overline{BC}) \cos \varphi(t), \quad y_C(t) = y(t) + (\zeta(t) - \overline{BC}) \sin \varphi(t). \quad (5.78)$$



Слика 5.33 Реализација брахистохроног кретања система посредством глатке вођице
 На слици 5.33 \vec{R}_C представља реакцију накнадно наметнуте механичке везе–глатке вођице, која је у овом случају такође једнака сили \vec{F} , при чему је $\vec{R}_C \cdot \vec{V}_C = 0$.



Слика 5.34 Трајекторије тачке C при различитим вредностима крутости опруге

5.3.1 Анализа брахистохроног кретања система за граничне случајеве почетног положаја материјалне тачке B

Резултати приказани у претходном делу овог поглавља су одређени при познатој вредности почетног положаја $\xi_0 = 1\text{m}$ тачке B , где се са слике 5.28 јасно може уочити да при датој вредности почетног положаја тачка B има једну зауставну тачку. Сада се природно намеће следеће питање: при којим вредностима почетног положаја тачка B неће имати зауставних тачака? Како бисмо дали одговор на ово питање, неопходно је најпре одредити интервал вредности почетног положаја при којем постоје решења одговарајућег TPBVP, а затим одредити интервал вредности почетног положаја при којем тачка B нема зауставних тачака. Граничне вредности интервала почетног положаја тачке B могу се одредити на основу граничних вредности брзине тачке B у почетном тренутку

$$V_B(t_0) = \frac{2E_0}{m} \lambda_{\xi_0}, \quad (5.79)$$

имајући притом у виду (5.70).

5.3.1.1 Случај $V_B(t_0) = 0$

Најпре се разматра први гранични случај када је брзина материјалне тачке B у почетном тренутку једнака нули

$$V_B(t_0) = 0, \quad (5.80)$$

где је, имајући у виду (5.79) и (5.80), координата λ_{ξ_0} једнака нули

$$\lambda_{\xi_0} = 0, \quad (5.81)$$

што је у складу са интервалом вредности (5.67). Координату λ_{φ_0} , имајући у виду (5.68) и (5.81), сада можемо изразити у следећем облику

$$\lambda_{\varphi_0} = \xi_0^* \left(\lambda_y \pm \sqrt{\frac{m}{2E_0}} \right), \quad (5.82)$$

где је ξ_0^* непозната вредност почетног положаја материјалне тачке B при којој је испуњен услов (5.80), односно (5.81). Брзина материјалне тачке A у почетном тренутку, у овом случају, имајући у виду (5.57) и (5.80), има вредност

$$V_A(t_0) = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}. \quad (5.83)$$

Непознате граничне вредности разматраног TPBVP су: координате λ_x и λ_y спрегнутог вектора, почетни положај ξ_0^* материјалне тачке B , као и минимално потребно време t_f . Максимална вредност крутости опруге у овом случају не може се одредити на основу (5.71), с обзиром да је $k_{max} = k_{max}(\xi_0^*)$. Максимална вредност крутости опруге биће одређена нумеричким итеративним поступком, са критеријомом престанка итерације

$$\left\| k_{max}^{i+1}(\xi_0^*) - k_{max}^i(\xi_0^*) \right\| < \varepsilon, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.84)$$

где је $\varepsilon = 10^{-8}$, са почетном итерацијом $k_{max}^0 = 30 \text{ N/m}$ (функционални низ $\{k_{max}^i(\xi_0^*)\}$ је конвергентан $k_{max}(\xi_0^*) := \lim_{i \rightarrow \infty} k_{max}^i(\xi_0^*)$). Нумерички итеративни алгоритам састоји се укратко у следећем: при задатој вредности почетне итерације (крутости опруге) k_{max}^0 , одређује се вредност почетног положаја ξ_0^* као решење TPBVP имајући у виду (5.81) и (5.82). За тако одређену вредност почетног положаја, одређује се максимална вредност крутости опруге према (5.71), која представља полазну вредност крутости опруге у наредној итерацији. Итеративни процес се зауставља при задовољењу критеријума (5.84). У табели 5.4 приказана су решења TPBVP за *Случај* $V_B(t_0) = 0$ (решења приказана у последњој врсти одговарају максималној вредности крутости опруге $k_{max1} = 30,609941 \text{ N/m}$).

Табела 5.4 Решења ТРВVP за *Случај* $V_B(t_0) = 0$ при различитим вредностима крутости опруге

k [N/m]	λ_x [s/m]	λ_y [s/m]	ξ_0^* [m]	t_f [s]
0	0,218244	0,004930	0,752110	2,211748
10	0,306381	0,062005	0,746635	2,312461
20	0,433999	0,143642	0,737670	2,467039
30	0,657897	0,285398	0,719677	2,878961
30,609941	0,680443	0,299685	0,717679	3,056395

5.3.1.2 Случај $V_B(t_0) = \sqrt{2E_0/m}$

Сада се разматра гранични случај када је брзина материјалне тачке B у почетном тренутку једнака

$$V_B(t_0) = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}, \quad (5.85)$$

где је на основу (5.79) и (5.85) одређена вредност координате λ_{ξ_0}

$$\lambda_{\xi_0} = \sqrt{\frac{m}{2E_0}}, \quad (5.86)$$

што је такође у складу са интервалом вредности (5.67). Координату λ_{φ_0} , имајући у виду (5.68) и (5.86), сада можемо изразити у следећем облику

$$\lambda_{\varphi_0} = \xi_0 \lambda_y, \quad (5.87)$$

док је брзина материјалне тачке A у почетном тренутку, у овом случају, једнака нуки

$$V_A(t_0) = 0. \quad (5.88)$$

У табели 5.5 приказана су решења ТРВVP за *Случај* $V_B(t_0) = \sqrt{2E_0/m}$ ($k_{max2} = 33,371589$ N/m).

Табела 5.5 Решења ТРВVP за *Случај* $V_B(t_0) = \sqrt{2E_0/m}$ при различитим вредностима крутости опруге

k [N/m]	λ_x [s/m]	λ_y [s/m]	ξ_0^* [m]	t_f [s]
0	-0,306798	-1,075040	0,404456	2,373776
10	-0,240747	-1,027881	0,397916	2,443899
20	-0,156835	-0,968884	0,388370	2,551095
30	-0,038588	-0,886890	0,372809	2,770898
33,371589	0,019102	-0,847090	0,364290	3,092644

5.3.1.3 Случај $V_B(t_0) = -\sqrt{2E_0/m}$

Гранични случај када је брзина материјалне тачке B у почетном тренутку једнака

$$V_B(t_0) = -\sqrt{\frac{2E_0}{m}}, \quad (5.89)$$

координата λ_{ξ_0} , на основу (5.79) и (5.89), има вредност

$$\lambda_{\xi_0} = -\sqrt{\frac{m}{2E_0}}, \quad (5.90)$$

што је такође у складу са интервалом вредности (5.67). Координата λ_{φ_0} , као и у *Случају* $V_B(t_0) = \sqrt{2E_0/m}$, одређена је као $\lambda_{\varphi_0} = \xi_0 \lambda_y$, док је брзина материјалне тачке A у почетном тренутку такође једнака нули, односно $V_A(t_0) = 0$. У табели 5.6 приказана су решења ТРВVP за *Случај* $V_B(t_0) = -\sqrt{2E_0/m}$ ($k_{max3} = 30,087691$ N/m).

Табела 5.6 Решења ТРВВР за *Случај* $V_B(t_0) = -\sqrt{2E_0/m}$ при различитим вредностима крутости опруге

k [N/m]	λ_x [s/m]	λ_y [s/m]	ξ_0^* [m]	t_f [s]
0	0,866653	1,339126	1,221989	2,452087
10	0,974335	1,406450	1,198938	2,544832
20	1,137202	1,507002	1,166363	2,694370
30	1,448748	1,696068	1,108863	3,202843
30,087691	1,453664	1,699036	1,107973	3,276697

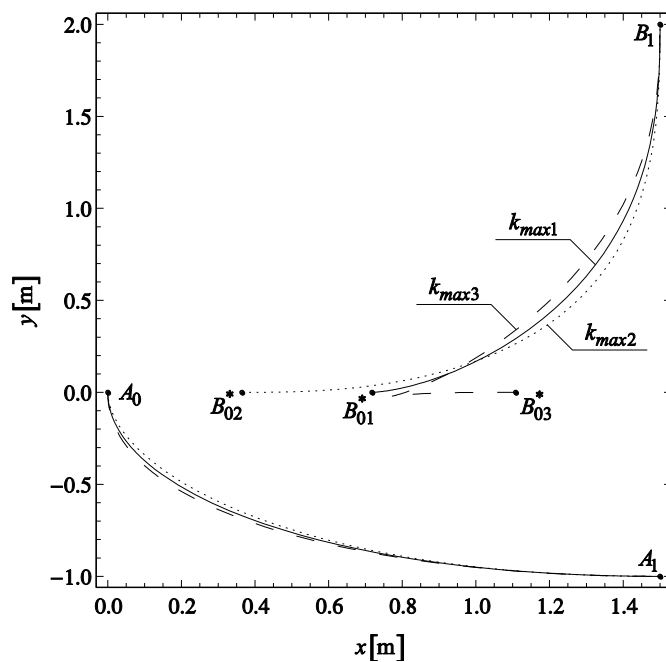
На основу детаљне анализе изложене у претходном делу овог поглавља, у табели 5.7 у колони $\Delta 1$ приказани су интервали вредности почетног положаја материјалне тачке B унутар којих материјална тачка B при кретању нема зауставних тачака, док су у колони $\Delta 2$ приказани интервали вредности почетног положаја материјалне тачке B унутар којих постоје решења ТРВВР, при различитим вредностима крутости опруге.

Табела 5.7 Интервали вредности почетног положаја

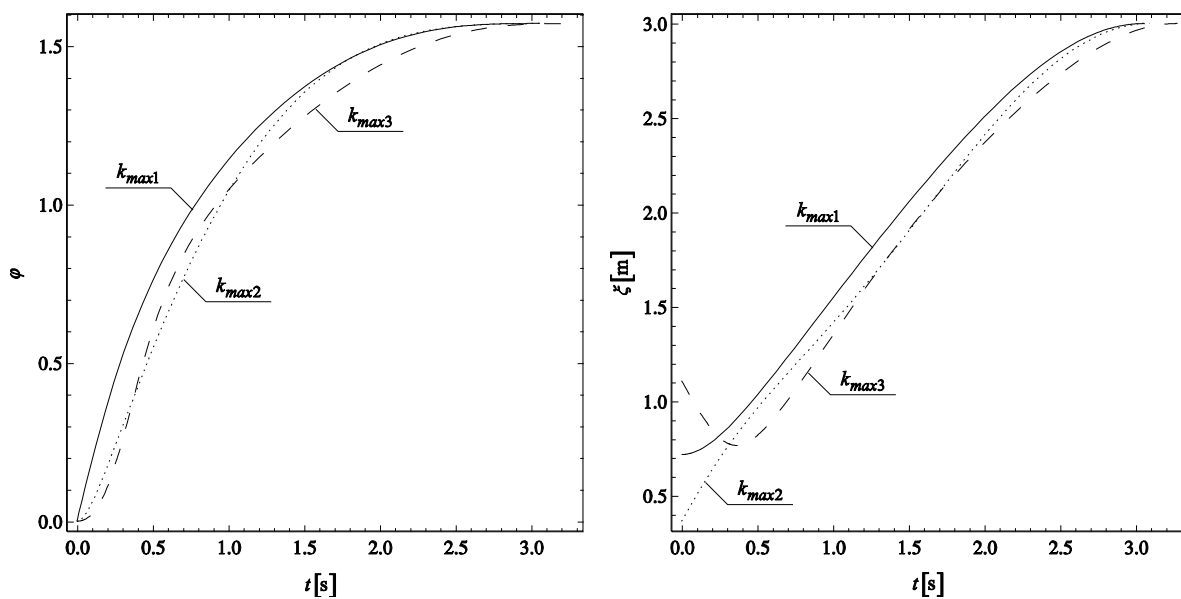
k [N/m]	$\Delta 1$ [m]	$\Delta 2$ [m]
0	$0,404456 \leq \xi_0^* \leq 0,752110$	$0,404456 \leq \xi_0^* \leq 1,221989$
10	$0,397916 \leq \xi_0^* \leq 0,746635$	$0,397916 \leq \xi_0^* \leq 1,198938$
20	$0,388370 \leq \xi_0^* \leq 0,737670$	$0,388370 \leq \xi_0^* \leq 1,166363$
30	$0,372809 \leq \xi_0^* \leq 0,719677$	$0,372809 \leq \xi_0^* \leq 1,108863$

Сада се може тврдити да решења ТРВВР, при различитим вредностима крутости опруге k , постоје само при вредностима почетног положаја ξ_0 материјалне тачке B , које се налазе унутар одређених интервала вредности почетног положаја (приказаних у колони $\Delta 2$ табеле 5.7), тако да изван приказаних интервала вредности не постоје решења одговарајућег ТРВВР. На сликама 5.35–5.39 приказани су закони промене генерализаних координата, брзина материјалних тачака A и B , реакција

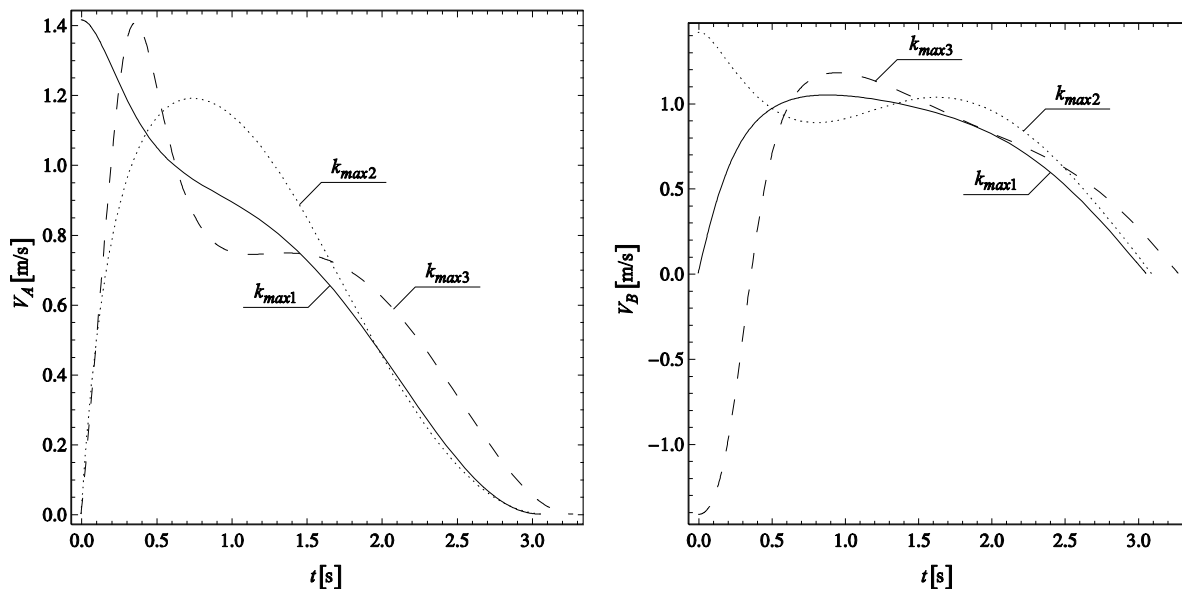
нехолономних веза и управљачких сила за граничне *Случаје* при максималним вредностима крутости опруге, чија су решења дата у табелама 5.4–5.6.



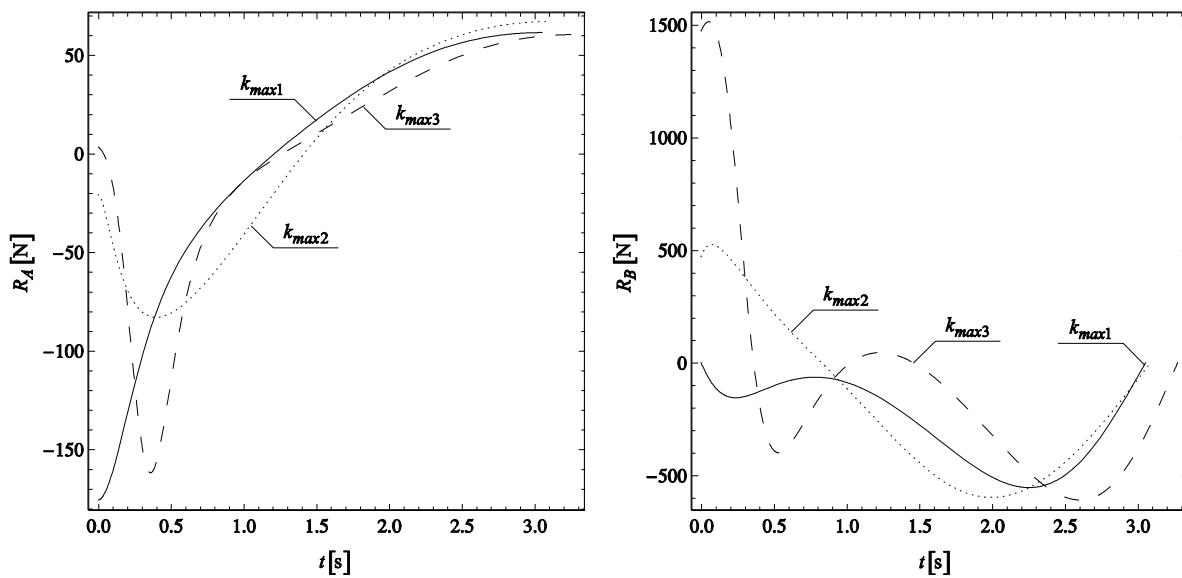
Слика 5.35 Трајекторије материјалних тачака A и B за граничне случаје



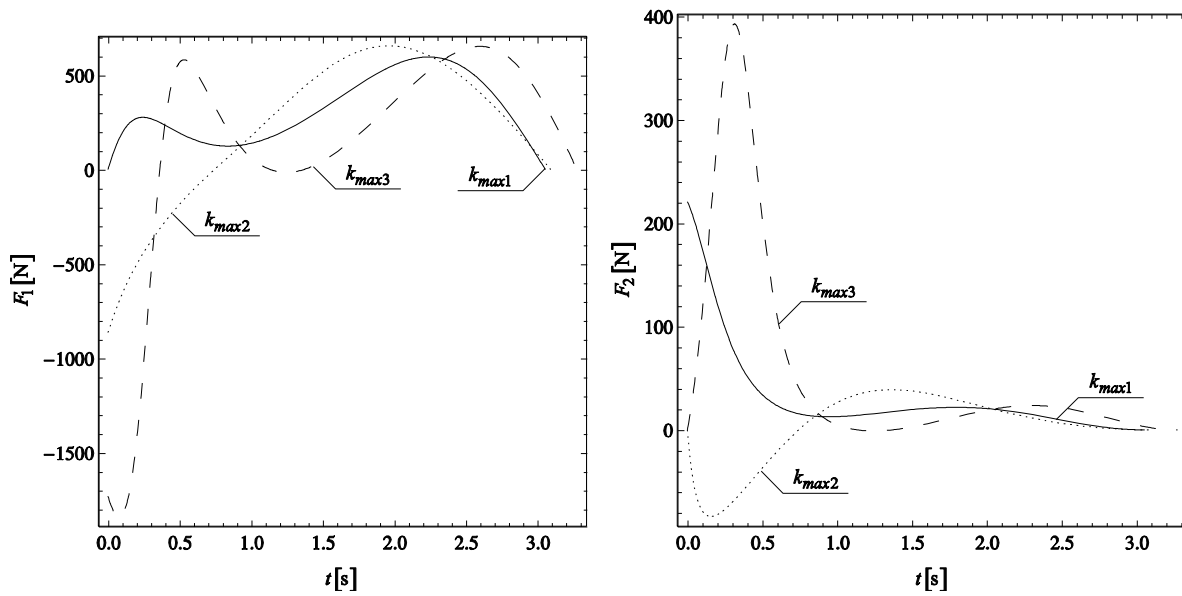
Слика 5.36 Генерализане координате φ и ζ за граничне случаје



Слика 5.37 Брзине V_A и V_B за граничне случаје

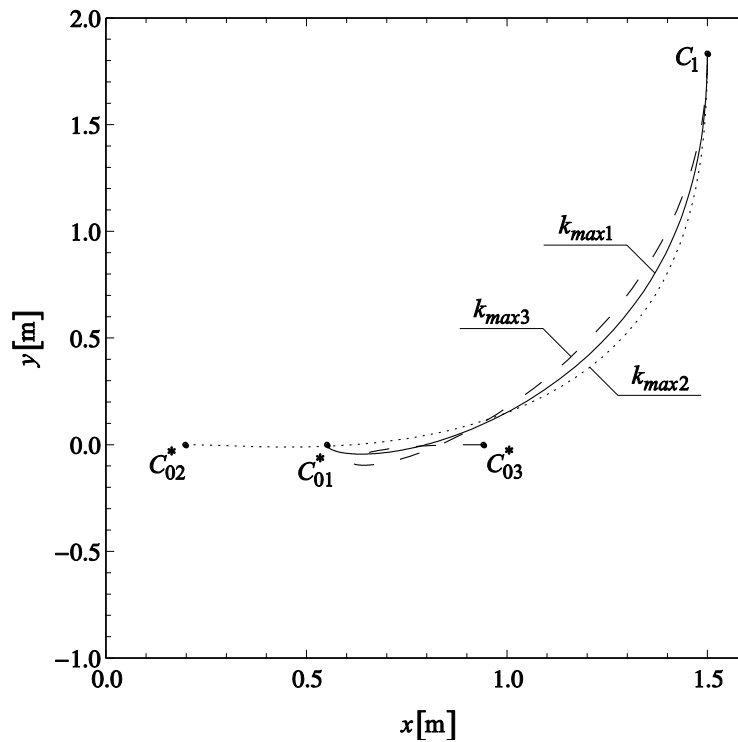


Слика 5.38 Реакције R_A и R_B нехолономних веза за граничне случаје



Слика 5.39 Управљачке силе F_1 и F_2 за граничне случаје

Трајекторије тачке C за приказане *Случаје*, при максималним вредностима крутости опруге, дате су на слици 5.40.



Слика 5.40 Трајекторије тачке C за граничне случаје

Литература

- Antunes, A. C. B., Sigaud, C.: Controlling nonholonomic Chaplygin systems, *Braz J Phys*, 40, pp. 131-140, 2010.
- Bloch, A. M.: *Nonholonomic mechanics and control*, Springer, Berlin, 2003.
- Caratheodory, C. Der Schlitten, *ZAMM-Z Angew Math Me*, 13, pp. 71-76, 1933.
- Chaplygin, S. A.: On the theory of motion of nonholonomic systems. The reducing-multiplier theorem, *Math Collect*, 28, pp. 303-314 (English translation by Getling, AV. *Regular Chaotic Dynam* 2008; 13, pp. 369-376), 1911.
- Čović, V., Lukačević, M., Vesković, M.: *On brachistochronic motions*, Budapest: Budapest University of Technology and Economics, 2007.
- Hirsch, M. J., Pardalos, P. M., Resende, MG. C.: Solving systems of nonlinear equations with continuous GRASP, *Nonlinear Anal Real*, 10, pp. 2000–2006, 2009.
- Hirsch, M.J.: *GRASP-Based heuristics for continuous global optimization problems*, University of Florida, 2006.
- Hull, D. G.: Initial Lagrange multipliers for the shooting method, *J Guid Control Dyn*, 31, pp. 1490–1492, 2008.
- Jeremić, O., Šalinić, S., Obradović, A.: On the brachistochrone of a variable mass particle in general force fields, *Math. Comput. Model*, 54, pp. 2900-2912, 2011.
- Leitmann, G.: *The Calculus of Variations and Optimal Control*, New York, Springer Science+Buisiness, 1981.
- Neimark, J. I., Fufaev, N. A.: *Dynamics of nonholonomic systems*, (Translations of Mathematical Monographs 33). Providence, RI: AMS, 1972.
- Obradović, A., Čović, V., Vesković, M.: Brachistochronic motion of a nonholonomic rheonomic mechanical system, *Acta Mech.*, 214, pp. 291-304, 2010.
- Obradović, A., Šalinić, S., Jeremić, O.: On the brachistochronic motion of a variable-mass mechanical system in general force fields, *Math. Mech. Solids*, 19, pp. 398-410, 2014.
- Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V.: *The mathematical theory of optimal processes*, New York/London: John Wiley & Sons, 1962.

- Qin, A. K., Huang, V. L., Suganthan, P. N.: Differential Evolution Algorithm With Strategy Adaptation for Global Numerical Optimization, *IEEE T Evolut Comput*, 13, pp. 398–417, 2009.
- Radulović, R., Obradović, A., Jeremić, B.: Analysis of the minimum required coefficient of sliding friction at brachistochronic motion of a nonholonomic mechanical system, *FME Trans.*, 42, pp. 201-206, 2014.a.
- Radulović, R., Šalinić, S., Obradović, A., Rusov, S.: A new approach for the determination of the global minimum time for the Chaplygin sleigh brachistochrone problem, *Mathematics and Mechanics of Solids (IF = 1,836 за 2015. godinu)*, First Online: 14 March 2016 (ISSN 1081-2865), [doi: 10.1177/1081286516637234](https://doi.org/10.1177/1081286516637234)
- Radulović, R., Zeković, D, Lazarević, M., Segl'a, Š., Jeremić, B.: Analysis the brachistochronic motion of a mechanical system with nonlinear nonholonomic constraint, *FME Trans.*, 42, pp. 290-296, 2014.b.
- Ruina, A.: Non-holonomic stability aspects of piecewise-holonomic systems, *Rep Math Phys*, 42, pp. 91-100, 1998.
- Ruskeepää, H.: *Mathematica*® Navigator: Mathematics, statistics, and graphics, Amsterdam: Academic Press, 2009.
- Šalinić, S., Obradović, A., Mitrović, Z.: Brachistochrone with limited reaction of constraint in an arbitrary force field, *Nonlinear Dynam.*, 69, pp. 211-222, 2012.
- Šalinić, S., Obradović, A., Mitrović, Z.: Erratum to: Brachistochrone with limited reaction of constraint in an arbitrary force field, *Nonlinear Dynam.*, 70, pp. 891-892, 2012.
- Šalinić, S., Obradović, A., Mitrović, Z.: On the brachistochronic motion of the Chaplygin sleigh, *Acta Mech.*, 224, pp. 2127-2141, 2013.
- Soltakhanov, Sh. Kh., Yushkov, M. P., Zegzhda, S. A.: *Mechanics of non-holonomic systems*, Berlin: Springer, 2009.
- Song, W., Wang, Y., Li, H-X: Locating multiple optimal solutions of nonlinear equation systems based on multiobjective optimization, *IEEE T Evolut Comput*, 19, pp. 414–431, 2015.
- Stoer, J., Bulirsch, J.: *Introduction to numerical analysis*, Springer, Berlin, 1993.
- Vujanović, B. D.: *Metodi optimizacije*, Novi Sad, 1980.

Поглавље 6

Глобални минимум времена при брахистохроном кретању нехолономног механичког система са ограниченим управљањима

6.1 Формулација проблема

Разматра се кретање механичког система који се састоји од N материјалних тачака, које у општем случају могу бити променљиве масе. Конфигурација система одређена је са n генералисаних координата $\mathbf{q} = (q^1, q^2, \dots, q^n)^T$ за које кажемо да су независне у геометријском смислу. Такође, познати су закони промене маса материјалних тачака

$$m_p = m_p(t), \quad p = 1, \dots, N, \quad (6.1)$$

где су $m_p(t)$ непрекидне и диференцијабилне функције времена. Промена масе може наступити припајањем или одвајањем или истовременим припајањем и одвајањем честица тачкама, при чему се претпоставља да је сам процес непрекидан у посматраном интервалу времена. Релативне брзине припајања (или одвајања) честица су

$$\bar{\mathbf{v}}_p^{rel} = \bar{\mathbf{v}}_p^{rel}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad p = 1, \dots, N, \quad (6.2)$$

где је $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n)^T$ вектор генералисаних брзина. Кинетичка енергија склерономног механичког система је хомогена квадратна форма генералисаних брзина [Lurie, 2002; Papastavridis, 2002; Papastavridis, 1999]

$$T = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (6.3)$$

при чему су координате коваријантног метричког тензора, узимајући у обзир (6.1), функције генералисаних координата и времена t

$$a_{ij} = a_{ij}(\mathbf{q}, t). \quad (6.4)$$

Кретање разматраног механичког система ограничава l идеалних независних хомогених нехолономних механичких веза, које се према (1.8) за $\varphi^i = 0$ могу записати у следећем облику

$$\psi^v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \equiv \dot{q}^v - b_\alpha^v \dot{q}^\alpha = 0, \quad (6.5)$$

где су $b_\alpha^v = b_\alpha^v(\mathbf{q})$. Све генералисане брзине \dot{q}^i , на основу (1.15), могу се изразити као линеарна хомогена форма независних квазибрзина

$$\dot{q}^i = c_\alpha^i \dot{\pi}^\alpha. \quad (6.6)$$

Кинетичка енергија нехолономног склерономног механичког система, на основу (1.29) за $\varphi^i = 0$, може се изразити као хомогена квадратна форма независних квазибрзина

$$T^* = T(\dot{q}^i = c_\alpha^i \dot{\pi}^\alpha) = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \dot{\pi}^\alpha \dot{\pi}^\beta. \quad (6.7)$$

Нека се механички систем креће у произвољном пољу познатих потенцијалних сила са потенцијалном енергијом

$$\Pi = \Pi(\mathbf{q}, t), \quad (6.8)$$

⁴³ У раду се користи Ајнштајнова конвенција о сабирању. Индекси узимају следеће вредности: $i, j, k, r = 1, \dots, n$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \dots, m$; $v, \rho = m+1, \dots, n$; $s, z = 1, \dots, m-1$.

и нека на систем дејствују произвољне познате непотенцијалне силе, чије генералисане силе имају облик

$$Q_i^w = Q_i^w(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (6.9)$$

Генералисане силе које одговарају геометријски независним координатама q^i , у општем случају, могу се приказати у следећем облику

$$Q_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i^w + Q_i^{\text{var}} + Q_i^c + Q_i^\Lambda. \quad (6.10)$$

Диференцијалне једначине, које описују кретање нехолономног механичког система променљиве масе у конфигурационом простору V_m , на основу (1.36), имају следећи облик

$$G_{\alpha\beta} \ddot{\pi}^\beta + a_{ij} c_\alpha^i c_\gamma^k \left(\frac{\partial c_\beta^j}{\partial q^k} + \Gamma_{kr}^j c_\beta^r \right) \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma = \tilde{Q}_\alpha, \quad (6.11)$$

где су

$$\tilde{Q}_\alpha(\mathbf{q}, \dot{\pi}, t) = c_\alpha^i Q_i^*, \quad (6.12)$$

генералисане силе које одговарају кинематски независним координатама, док су $Q_i^* = Q_i(\dot{q}^i = c_\alpha^i \dot{\pi}^\alpha)$. Једначине (6.11), на основу (1.37), могу се приказати у следећем облику

$$G_{\alpha\beta} \ddot{\pi}^\beta = \Delta_\alpha, \quad (6.13)$$

где су

$$\Delta_\alpha(\mathbf{q}, \dot{\pi}, t) = \tilde{Q}_\alpha - a_{ij} c_\alpha^i c_\gamma^k \left(\frac{\partial c_\beta^j}{\partial q^k} + \Gamma_{kr}^j c_\beta^r \right) \dot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\gamma. \quad (6.14)$$

Генералисане реактивне силе Q_i^{var} , које настају услед припајања (или одвајања) честица, имају следећи облик

$$Q_i^{\text{var}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{p=1}^N \dot{m}_p \vec{v}_p^{\text{rel}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial q^i}, \quad (6.15)$$

док су $Q_i^c = Q_i^c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ генералисане управљачке силе, чија је укупна снага током брахистохроног кретања једнака нули

$$Q_i^c \dot{q}^i = 0, \quad (6.16)$$

где се, имајући у виду (6.6) и (6.12), претходни израз може записати у следећем облику

$$\tilde{Q}_\alpha^c \dot{\pi}^\alpha = 0. \quad (6.17)$$

Генералисане силе услед наметнутих ограничења кретања (6.5) одређене су као

$$Q_i^\Lambda(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \Lambda_\nu \frac{\partial \psi^\nu}{\partial \dot{q}^i}, \quad (6.18)$$

где су Λ_ν Лагранжеви множитељи веза. Генералисане силе \tilde{Q}_α^Λ услед наметнутих ограничења кретања (6.5), које одговарају кинематски независним координатама, на основу (1.44), једнаке су нули

$$\tilde{Q}_\alpha^\Lambda = 0. \quad (6.19)$$

Множећи обе стране једначине (6.13) са $\dot{\pi}^\alpha$ и сумирајући по индексу α добија се

$$G_{\alpha\beta} \ddot{\pi}^\beta \dot{\pi}^\alpha = \Delta_\alpha \dot{\pi}^\alpha, \quad (6.20)$$

што се може записати и у следећем облику

$$G_{\alpha s} \ddot{\pi}^\alpha \dot{\pi}^s + G_{\alpha m} \ddot{\pi}^m \dot{\pi}^\alpha = \Delta_\alpha \dot{\pi}^\alpha. \quad (6.21)$$

Имајући у виду (6.17) и (6.19), у једначини (6.21) неће фигурирати непознати множитељи веза као ни генералисане управљачке силе. Сада смо, не умањујући општост даљег излагања, у могућности да изразимо $\ddot{\pi}^m$ из једначине (6.21) у следећем облику

$$\ddot{\pi}^m = \Phi + \Phi_s \dot{\pi}^s, \quad (6.22)$$

где су

$$\Phi(\mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\pi}}, t) = \frac{\Delta_{\beta} \dot{\pi}^{\beta}}{G_{\alpha m} \dot{\pi}^{\alpha}}, \quad (6.23)$$

$$\Phi_s(\mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\pi}}, t) = -\frac{G_{\beta s} \dot{\pi}^{\beta}}{G_{\alpha m} \dot{\pi}^{\alpha}}.$$

Претпоставља се да израз $G_{\alpha m} \dot{\pi}^{\alpha}$, који фигурише у имениоцима релација (6.23), није једнак нули за време кретања система, односно $G_{\alpha m} \dot{\pi}^{\alpha} \neq 0 \forall t \in [t_0, t_f]$, где су t_0 и t_f почетни и крајњи тренутак који одговарају почетном, односно крајњем положају система респективно. Нека су задате вредности генералисаних координата, као и вредност механичке енергије система у почетном тренутку

$$t_0 = 0, \quad \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad (6.24)$$

$$T^*(\mathbf{q}_0, \dot{\boldsymbol{\pi}}_0, t_0) + \Pi(\mathbf{q}_0, t_0) = E_0, \quad (6.25)$$

као и вредности генералисаних координата у крајњем положају система

$$\mathbf{q}(t_f) = \mathbf{q}_f, \quad (6.26)$$

где су $E_0 \in \mathbb{R}$ и $t_f \in \mathbb{R}$.

6.2 Брахистохрони проблем као задатак оптималног управљања

Брахистохрони проблем формулисан је као задатак оптималног управљања увођењем управљања u^s као

$$u^s = \ddot{\pi}^s. \quad (6.27)$$

Уведимо смену у следећем облику $V^{\alpha} = \dot{\pi}^{\alpha}$, па је

$$\mathbf{V} = (V^1, V^2, \dots, V^m)^T, \quad (6.28)$$

вектор независних квазибрзина. Диференцијалне једначине првог реда у нормалном облику, које су у теорији оптималног управљања познате као једначине стања, могу се записати увођењем реономне координате $q^{n+1} \triangleq t$ на следећи начин

$$\begin{aligned}
\dot{q}^i &= f^i(\mathbf{q}, V, q^{n+1}, \mathbf{u}) \equiv c_\beta^i V^\beta, \\
\dot{q}^{n+1} &= f^{n+1}(\mathbf{q}, V, q^{n+1}, \mathbf{u}) \equiv 1, \\
\dot{V}^s &= f^{n+1+s}(\mathbf{q}, V, q^{n+1}, \mathbf{u}) \equiv u^s, \\
\dot{V}^m &= f^{n+1+m}(\mathbf{q}, V, q^{n+1}, \mathbf{u}) \equiv \Phi(\mathbf{q}, V, q^{n+1}) + \Phi_s(\mathbf{q}, V, q^{n+1})u^s,
\end{aligned} \tag{6.29}$$

где је $\mathbf{u} = (u^1, u^2, \dots, u^{m-1})^T$ вектор управљања, док су $u^s(\cdot): [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$.

Брахистохрони проблем разматраног нехолономног механичког система састоји се у одређивању екстремалних управљања u^s , као и њима одговарајућих екстремалних трајекторија у простору стања $q^i(t)$, тако да механички систем који започиње кретање из познатог почетног положаја на многострукости (6.24), пређе у крајњи одређен положај на многострукости (6.26), уз задату вредност механичке енергије система у почетном тренутку (6.25), за минимално време. То се може изразити у виду услова да функционал

$$J(\mathbf{q}, V, q^{n+1}, \mathbf{u}) = \int_0^{t_f} dt, \tag{6.30}$$

на интервалу $[0, t_f]$ има минималну вредност. У циљу решења проблема оптималног управљања формира се Понтрјагинова функција у следећем облику [Vuković, 1984; Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962]

$$H(\mathbf{q}, V, q^{n+1}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) = -1 + \lambda_j c_\beta^j V^\beta + \lambda_{n+1} + v_s u^s + v_m (\Phi + \Phi_s u^s), \tag{6.31}$$

где су $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1})^T$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$, док су $\lambda_i(\cdot): [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$,

$\lambda_{n+1}(\cdot): [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ и $v_\alpha(\cdot): [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ координате спрегнутог вектора, тако да

спрегнути систем диференцијалних једначина има следећи облик

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\lambda_j \frac{\partial c_\beta^j}{\partial q^i} V^\beta - v_m \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q^i} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial q^i} u^s \right), \\
\dot{\lambda}_{n+1} &= -\frac{\partial H}{\partial q^{n+1}} = -\lambda_j \frac{\partial c_\beta^j}{\partial q^{n+1}} V^\beta - v_m \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q^{n+1}} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial q^{n+1}} u^s \right), \\
\dot{v}_\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial V^\alpha} = -\lambda_j c_\alpha^j - v_m \left(\frac{\partial \Phi}{\partial V^\alpha} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial V^\alpha} u^s \right).
\end{aligned} \tag{6.32}$$

На основу (6.31) можемо писати

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{V}, q^{n+1}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) = H_0 + H_s u^s, \tag{6.33}$$

где су

$$\begin{aligned}
H_0 &= -1 + \lambda_j c_\beta^j V^\beta + \lambda_{n+1} + v_m \Phi, \\
H_s &= v_s + v_m \Phi_s.
\end{aligned} \tag{6.34}$$

Овакав случај, када Понтрјагинова функција линеарно зависи од управљања, у теорији оптималних управљања је познат као сингуларан [Obradović, 1994; Bryson, 1975], где су потребни услови оптималности, који проистичу из Понтрјагиновог принципа максимума, могу записати у следећем облику

$$\frac{\partial H}{\partial u^s} = H_s = 0, \tag{6.35}$$

одакле се екстремална управљања u^s не могу експлицитно одредити. Сада се гранични услови могу приказати у следећем облику

$$\left(\lambda_i \Delta q^i + \lambda_{n+1} \Delta q^{n+1} + v_s \Delta V^s + v_m \Delta V^m \right) \Big|_0^{t_f} = 0, \tag{6.36}$$

$$(H \Delta t) \Big|_0^{t_f} = 0, \tag{6.37}$$

где $\Delta(\cdot)$ представља асинхрону варијацију [Elsgolc, 1963; Gelfand, Fomin, 1964] величине (\cdot) . На основу услова (6.35), у могућности смо да спрегнуте променљиве v_s изразимо у функцији спрегнуте променљиве v_m у следећем облику

$$v_s = -v_m \Phi_s. \tag{6.38}$$

Наиме, неопходни услови (6.35) захтевају да коефицијенти H_s у (6.33) буду идентички једнаки нули дуж екстремалне трајекторије стања. Екстремална управљања u^s одређују се даљим диференцирањем по времену (6.35) у складу са (6.29) и (6.32)

$$\frac{d^k}{dt^k} \left[\frac{\partial H}{\partial u^s} \right] = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.39)$$

Приликом формирања релација (6.39) биће примењен добро познат формализам Поасонових заграда [Gabasov, Kirillova, 1972], тако да су

$$\dot{H}_s = \{H, H_s\} = \{H_s, H_0\} + \{H_s, H_z\} u^z = 0. \quad (6.40)$$

Узимајући у обзир услове (6.35), као и чињеницу да дуж сингуларног дела екстремалне трајекторије следеће релације важе

$$\{H_s, H_z\} = 0, \quad (6.41)$$

добива се да су

$$\{H_s, H_0\} = \sum_{g=1}^{n+1+m} \left(\frac{\partial H_s}{\partial x^g} \frac{\partial H_0}{\partial \xi^g} - \frac{\partial H_s}{\partial \xi^g} \frac{\partial H_0}{\partial x^g} \right) = 0, \quad (6.42)$$

где су $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^{n+1+m})^T \triangleq (q^1, q^2, \dots, q^{n+1}, V^1, V^2, \dots, V^m)^T$ и

$\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{n+1+m})^T \triangleq (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)^T$. Сада, из једначина (6.42),

узимајући у обзир (6.34) и (6.38), координате λ_z спрегнутог вектора могу се изразити у следећем облику

$$\lambda_z(\mathbf{q}, \mathbf{V}, q^{n+1}, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n, \nu_m) = \Omega_z^s(\nu_m \varphi_s - \lambda_m \omega_s^m - \lambda_\rho \omega_s^\rho), \quad (6.43)$$

где су

$$\begin{aligned}
\varphi_s &= \frac{\partial \Phi_s}{\partial q^i} c_\alpha^i V^\alpha + \frac{\partial \Phi_s}{\partial q^{n+1}} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial V^m} \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial V^s} - \frac{\partial \Phi}{\partial V^m} \Phi_s, \\
\omega_s^m &= c_s^m + c_m^m \Phi_s, \\
\omega_s^\rho &= c_s^\rho + c_m^\rho \Phi_s, \\
\Omega_z^s &= \frac{X_z^s}{\omega},
\end{aligned} \tag{6.44}$$

док су X_z^s кофактори детерминанте $\omega = |\omega_s^z|$. Даљим диференцирањем (6.40) по времену добијају се следеће једначине

$$\{\{H_s, H_0\}, H_0\} + \{\{H_s, H_0\}, H_z\} u^z = 0. \tag{6.45}$$

Ограничавајући разматрање на сингуларна управљања првог реда ($\{\{H_s, H_0\}, H_z\} \neq 0$) (видети [Gabasov, Kirillova, 1972]), одређују се сингуларна управљања u^s као решења линеарног система (6.45) једначина, имајући у виду притом (6.38) и (6.43), у следећем облику

$$u^s = u^s(\mathbf{q}, V, q^{n+1}, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n, v_m). \tag{6.46}$$

Имајући у виду да је почетни положај (6.24) механичког система одређен, следеће варијације једнаке су нули

$$\Delta t(t_0) = 0, \quad \Delta q^i(t_0) = 0, \quad \Delta q^{n+1}(t_0) = 0. \tag{6.47}$$

Узимајући у обзир (6.47) и применом оператора асинхроне варијације на релацији (6.25), добија се

$$G_{\alpha\beta}(t_0) V^\beta(t_0) \Delta V^\alpha(t_0) = 0, \tag{6.48}$$

и на крају, након замене (6.38) и (6.47) у (6.36), добија се

$$v_\alpha(t_0) \Delta V^\alpha(t_0) = v_m(t_0) G_{\alpha\beta}(t_0) V^\beta(t_0) \Delta V^\alpha(t_0) = 0. \tag{6.49}$$

Сада, на основу (6.47), (6.48) и (6.49), евидентно је да су гранични услови (6.36) и (6.37) у почетној конфигурацији система задовољени. У крајњој конфигурацији (6.26) система, како време t_f није унапред одређено ($\Delta t(t_f) \neq 0$), услов транверзалности произилази из (6.37)

$$H(t_f) = 0. \quad (6.50)$$

Како величине $V^\alpha(t_f)$ и $q^{n+1}(t_f)$ нису унапред одређене ($\Delta V^\alpha(t_f) \neq 0, \Delta q^{n+1}(t_f) \neq 0$), следећи природни гранични услови добијају се из (6.36)

$$v_\alpha(t_f) = 0, \lambda_{n+1}(t_f) = 0. \quad (6.51)$$

Могуће је на основу (6.31), (6.43), (6.50) и (6.51) успоставити следећу зависност у аналитичком облику

$$\begin{aligned} \lambda_m(t_f) &= \lambda_m(V(t_f), q^{n+1}(t_f), \lambda_{m+1}(t_f), \dots, \lambda_n(t_f)) \\ &= \frac{1 - \lambda_\rho(t_f) (c_\alpha^\rho(t_f) - \Omega_z^s(t_f) \omega_s^\rho(t_f) c_\alpha^z(t_f)) V^\alpha(t_f)}{(c_\alpha^m(t_f) - \Omega_z^s(t_f) \omega_s^m(t_f) c_\alpha^z(t_f)) V^\alpha(t_f)}, \end{aligned} \quad (6.52)$$

где су $V(t_f) = (V^1(t_f), V^2(t_f), \dots, V^m(t_f))^T$ и $q^{n+1}(t_f) = t_f$. На крају, имајући у виду сва претходна разматрања и релације, постављени проблем се своди на решавање система од $2n+3$ диференцијалних једначина првог реда у нормалном облику

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= c_\alpha^i V^\alpha, \\ \dot{q}^{n+1} &= 1, \\ \dot{V}^\alpha &= \dot{V}^\alpha(q, V, q^{n+1}, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n, v_m), \\ \dot{\lambda}_m &= \dot{\lambda}_m(q, V, q^{n+1}, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n, v_m), \\ \dot{\lambda}_\rho &= \dot{\lambda}_\rho(q, V, q^{n+1}, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n, v_m), \\ \dot{v}_m &= \dot{v}_m(q, V, q^{n+1}, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n, v_m). \end{aligned} \quad (6.53)$$

Такође, уколико је потребно, закони промене преосталих координата спрегнутог вектора могу бити одређени из (6.38) и (6.43) након решења система (6.53). У општем случају, услед изражене нелинеарности система (6.53), неопходно је одредити непознате граничне вредности ТРВРП применом неког нумеричког алгорита. У том смислу, имајућу у виду притом (6.51) и (6.52), овде је погодно извршити нумеричку

интеграцију диференцијалних једначина (6.53) уназад на интервалу $[t_f, 0]$.

Нумерички поступак састоји се од два корака:

– у првом кораку, имајући у виду одређене вредности генералисаних координата (6.26) у крајњем тренутку, као и да су $V(t_f) = V_f$, $v_m(t_f) = 0$, $\lambda_\rho(t_f) = \lambda_{\rho_f}$ и $\lambda_m(t_f) = \lambda_m(V_f, q_f^{n+1}, \lambda_{m+1_f}, \dots, \lambda_{n_f})$, у циљу решења постављеног Кошијевог проблема (6.53), на основу (6.24) и (6.25), могуће је успоставити $n+1$ релација у нумеричком облику

$$\begin{aligned} q_0^i &= h^i(V_f, q_f^{n+1}, \lambda_{m+1_f}, \dots, \lambda_{n_f}), \\ E_0 &= h^{n+1}(V_f, q_f^{n+1}, \lambda_{m+1_f}, \dots, \lambda_{n_f}). \end{aligned} \quad (6.54)$$

Функције (6.54) могу бити формиране у програмском окружењу *Wolfram Mathematica* на следећи начин

$$\begin{aligned} &h^i[q_f^{n+1} _? \text{NumberQ}, V_f^1 _? \text{NumberQ}, \dots, V_f^m _? \text{NumberQ}, \\ &\lambda_{m+1_f} _? \text{NumberQ}, \dots, \lambda_{n_f} _? \text{NumberQ}] := \text{First}[q^i[0] / .\text{NDSolve}[...]], \\ &h^{n+1}[q_f^{n+1} _? \text{NumberQ}, V_f^1 _? \text{NumberQ}, \dots, V_f^m _? \text{NumberQ}, \\ &\lambda_{m+1_f} _? \text{NumberQ}, \dots, \lambda_{n_f} _? \text{NumberQ}] := \\ &\text{First}[T^*(q[0], \pi[0], t_0) + \Pi(q[0], t_0) / .\text{NDSolve}[...]], \end{aligned} \quad (6.55)$$

где структура аргумената уграђених функција `NDSolve[]` и `First[]` треба бити формирана у складу са дефиницијом ових функција, као и (6.24), (6.25) и (6.53).

– У другом кораку, систем једначина (6.54) решава се по непознатим граничним вредностима $q_f^{n+1} = t_f$, V_f и λ_{ρ_f} . У овом поглављу TPBVP решен је у оквиру програмског окружења *Wolfram Mathematica* користећи уграђену функцију `FindRoot[]`. Након нумеричког решавања и добијања недостајућих граничних вредности проблем је комплетно решен.

Након ових корака могу се одредити

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(t), \mathbf{V} = \mathbf{V}(t), \lambda_m = \lambda_m(t), \lambda_{m+1} = \lambda_{m+1}(t), \dots, \lambda_n = \lambda_n(t), v_m = v_m(t), \quad (6.56)$$

док се на основу (6.8), (6.27) и (6.46) могу одредити

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(t), \quad \ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}}(t), \quad \dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{V}}(t). \quad (6.57)$$

Сада се могу одредити закони промене Лагранжевих множитеља веза и управљачких сила. Полазећи од (1.32), имајући у виду (6.6), (1.17), (6.56) и (6.57), можемо писати

$$Q_i = a_{ij} a^j = f_i(t). \quad (6.58)$$

На основу (6.10), (6.18), (6.56), (6.57) и (6.58) можемо такође писати

$$Q_i^c + \Lambda_v \frac{\partial \psi^v}{\partial \dot{q}^i} = f_i(t) - Q_i^\Pi(t) - Q_i^w(t) - Q_i^{\text{var}}(t) = \bar{f}_i(t), \quad (6.59)$$

односно

$$Q_\alpha^c - \Lambda_v b_\alpha^v = \bar{f}_\alpha(t), \quad (6.60)$$

$$Q_v^c + \Lambda_v = \bar{f}_v(t), \quad (6.61)$$

док генералисане управљачке силе, које одговарају геометријски независним координатама, имају следећи облик

$$Q_i^c = \sum_{\alpha=1}^m \bar{F}_\alpha^c \cdot \frac{\partial \bar{r}_\alpha}{\partial q^i}, \quad (6.62)$$

где су \bar{F}_α^c управљачке силе. Сада су нам на располагању n једначина система (6.59), на основу којих смо у могућности да одредимо законе промене управљачких сила $F_\alpha^c = F_\alpha^c(t)$ и множитеље веза $\Lambda_v = \Lambda_v(t)$. Генералисане управљачке силе које одговарају кинематски независним координатама могу се одредити на основу (6.10), (6.11), (6.12), (6.22) и (6.27) у следећем облику

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_\alpha^c &= (G_{\alpha s} + G_{\alpha m} \Phi_s) u^s + G_{\alpha m} \Phi + a_{ij} c_\alpha^i c_\gamma^k \left(\frac{\partial c_\beta^j}{\partial q^k} + \Gamma_{kr}^j c_\beta^r \right) V^\beta V^\gamma \\ &\quad - \tilde{Q}_\alpha^\Pi - \tilde{Q}_\alpha^w - \tilde{Q}_\alpha^{\text{var}}, \end{aligned} \quad (6.63)$$

одакле се могу одредити управљачке силе $F_\alpha^c = F_\alpha^c(t)$, док се на основу (6.61) и (6.63), могу одредити множитељи веза $\Lambda_v = \Lambda_v(t)$.

Најпре ћемо разматрати кретање механичког система за случај неограничених управљачких сила и реакција веза, а затим и случај каду су управљачке силе или реакције веза ограничене до фиксних граница

$$F^* \leq F_\alpha^c \leq F^{**}, \quad (6.64)$$

$$R^* \leq \Lambda_v \leq R^{**}. \quad (6.65)$$

Реализација брахистохроног кретања механичког система, као што је речено, може се остварити накнадним наметањем систему s холономних идеалних стационарних механичких веза, без дејства активних управљачких сила у складу са претходно одређеним брахистохроним кретањем. При томе везе морају бити у складу са (6.56) и (6.57). Једначине накнадно наметнутих механичких веза можемо представити у следећем облику

$$\theta^s(\mathbf{q}) = 0, \quad (6.66)$$

где је ранг Јакобијана (6.66), $\left[\frac{\partial \theta^s}{\partial q^i} \right] \in \mathbb{R}^{(m-1) \times n}$

$$\text{rank} \left[\frac{\partial \theta^s}{\partial q^i} \right] = m - 1. \quad (6.67)$$

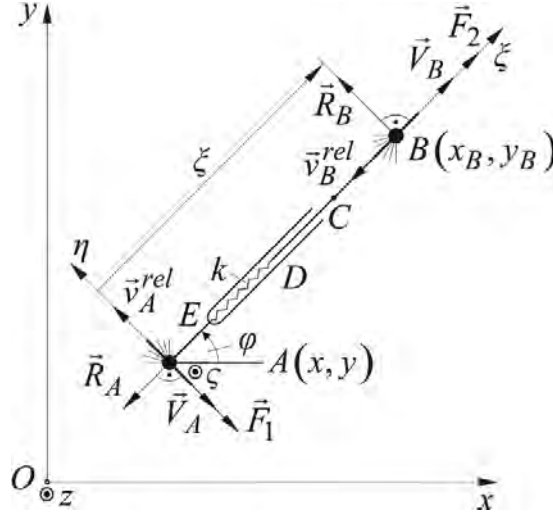
У овом случају управљачке силе имају следећи облик

$$Q_i^c = \mu_s \frac{\partial \theta^s}{\partial q^i}, \quad (6.68)$$

где су μ_s множитељи накнадно наметнутих веза који се могу одредити уколико је то неопходно. Један од начина за реализацију кретања накнадним наметањем механичких веза (6.66), може се остварити наметањем глатких вођица одређеном броју тачака чије је кретање одређено претходном нумеричком интеграцијом одговарајућих диференцијалних једначина кретања.

6.3 Нумерички пример 1

Разматра се нехолономни механички систем променљиве масе (видети слику 6.1) чији је детаљан опис дат у Поглављу 1.



Слика 6.1. Нехолономни механички систем променљиве масе

Закони промене маса материјалних тачака A и B у од функцији времена су

$$\begin{aligned} m_A(t) &= m_0 e^{-k_A t}, \\ m_B(t) &= m_0 e^{-k_B t}, \end{aligned} \quad (6.69)$$

где је m_0 маса тачака A и B у почетном тренутку $t_0 = 0$, док су k_A и k_B одређене позитивне константе. Интензитети релативних брзина одвајања честица, не умањујући општост даљег излагања, су константни и међусобно једнаки

$$v_A^{rel} = v_B^{rel} = v, \quad (6.70)$$

где је v одређена позитивна константа, док су $\vec{v}_A^{rel} = v\vec{\mu}$ и $\vec{v}_B^{rel} = -v\vec{\lambda}$. Сходно ограничењу кретања тачака A и B система, нехолономне хомогене везе могу се записати, у складу са (6.5), у следећем облику

$$\begin{aligned} \psi^3 &\equiv \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi = 0, \\ \psi^4 &\equiv -\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi + \xi \dot{\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Услед наметнутих ограничења кретања (6.71) јављају се хоризонталне реакције $\vec{R}_A = -R_A \cos \varphi \vec{i} - R_A \sin \varphi \vec{j}$ и $\vec{R}_B = -R_B \sin \varphi \vec{i} + R_B \cos \varphi \vec{j}$ нехолономних веза у

тачкама A и B респективно. За независне квазибрзине узете су брзине тачака A и B система респективно

$$\begin{aligned}\dot{\pi}^1 &= V_A = \dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi, \\ \dot{\pi}^2 &= V_B = \dot{\xi}.\end{aligned}\quad (6.72)$$

На основу (6.6), (6.71) и (6.72) све генералисане брзине могу се изразити у функцији независних квазибрзина

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{1}{\xi} V_A, \\ \dot{\xi} &= V_B, \\ \dot{x} &= \sin \varphi V_A, \\ \dot{y} &= -\cos \varphi V_A.\end{aligned}\quad (6.73)$$

Кинетичка и потенцијална енергија система, према (6.7) и (6.8), респективно су одређене следећим изразима

$$\begin{aligned}T^* &= \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \dot{\pi}^\alpha \dot{\pi}^\beta = \frac{1}{2} (m_A V_A^2 + m_B V_B^2), \\ \Pi &= \frac{1}{2} k [(\xi - l_0 - L)^2 - (\xi_0 - l_0 - L)^2].\end{aligned}\quad (6.74)$$

У тачкама A и B дејствују управљачке силе $\vec{F}_1 = -F_1(t) \vec{\mu}$ и $\vec{F}_2 = F_2(t) \vec{\lambda}$ респективно, чија је укупна снага током брахистохроног кретања једнака нули, тј. $F_1 V_A + F_2 V_B = 0$.

Сада, на основу (6.10), (6.11), (6.12), (6.15), (6.19), (6.62), (6.72), (6.73) и (6.74), могу се формирати диференцијалне једначине кретања система

$$\begin{aligned}m_A \dot{V}_A &= k_A m_A v + F_1, \\ m_B \dot{V}_B &= -k(\xi - l_0 - L) + k_B m_B v + F_2.\end{aligned}\quad (6.75)$$

Такође, на основу (6.14), (6.23) и (6.75), релације Φ_1 и Φ имају следећи облик

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= -\frac{m_A}{m_B} \frac{V_A}{V_B}, \\ \Phi &= k_A \frac{m_A}{m_B} \frac{V_A}{V_B} v + k_B v - \frac{k}{m_B} (\xi - l_0 - L),\end{aligned}\quad (6.76)$$

па се према (6.22), \dot{V}_B може изразити у следећем облику

$$\dot{V}_B = k_A \frac{m_A V_A}{m_B V_B} v + k_B v - \frac{k}{m_B} (\xi - l_0 - L) - \frac{m_A V_A}{m_B V_B} \dot{V}_A. \quad (6.77)$$

Почетни и крајњи услови (6.24), (6.25) и (6.26) познати су

$$\begin{aligned} t_0 = 0, \quad \varphi(t_0) = 0, \quad \xi(t_0) = 0, \quad a, \quad x(t_0) = 0, \quad y(t_0) = 0, \\ T^*(t_0) + \Pi(t_0) = \frac{1}{2} (m_A(t_0) V_A^2(t_0) + m_B(t_0) V_B^2(t_0)) = E_0, \\ \varphi(t_f) = \pi/2, \quad \xi(t_f) = 3a, \quad x(t_f) = 1,5a, \quad y(t_f) = -a, \end{aligned} \quad (6.78)$$

Користећи претходно описан нумерички поступак, решења TPBVP одредићемо за следеће вредности параметара

$$\begin{aligned} E_0 = 60 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}, \quad a = 1\text{m}, \quad k_A = 0,24 \frac{1}{\text{s}}, \quad k_B = 0,16 \frac{1}{\text{s}}, \quad k = 15 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \\ L = 0,5\text{m}, \quad l_0 = 0,5\text{m}, \quad v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad m_0 = 60\text{kg}, \quad g = 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Сада смо у могућности да координату $\lambda_\xi(t_f)$ спрегнутог вектора у крајњем тренутку, на основу (6.52), изразимо у следећем облику

$$\lambda_\xi(t_f) = \frac{m_B(t_f) V_B(t_f)}{m_A(t_f) V_A^2(t_f) + m_B(t_f) V_B^2(t_f)}. \quad (6.80)$$

Након спроведеног нумеричког поступка, добијају се следеће зависности у нумеричком облику

$$\varphi(t), \quad \xi(t), \quad x(t), \quad y(t), \quad V_A(t), \quad V_B(t), \quad \lambda_\varphi(t), \quad \lambda_\xi(t), \quad \lambda_y, \quad v_2(t), \quad (6.81)$$

као и време брахистохроног кретања $t_f = 1,98649\text{s}$. За различите вредности крутости опруге k у табели 6.1 приказане су недостајуће граничне вредности, а при вредностима константи $k_A = 0,241/\text{s}$ и $k_B = 0,161/\text{s}$. При томе је евидентно да са повећањем вредности крутости опруге, минимално време t_f се такође повећава. У табели 6.2 приказане су недостајуће граничне вредности при различитим вредностима константи k_A и k_B , а при вредности крутости опруге $k = 15\text{N/m}$. На слици 6.2 приказане су трајекторије тачака A и B , док су на слици 6.3 приказани

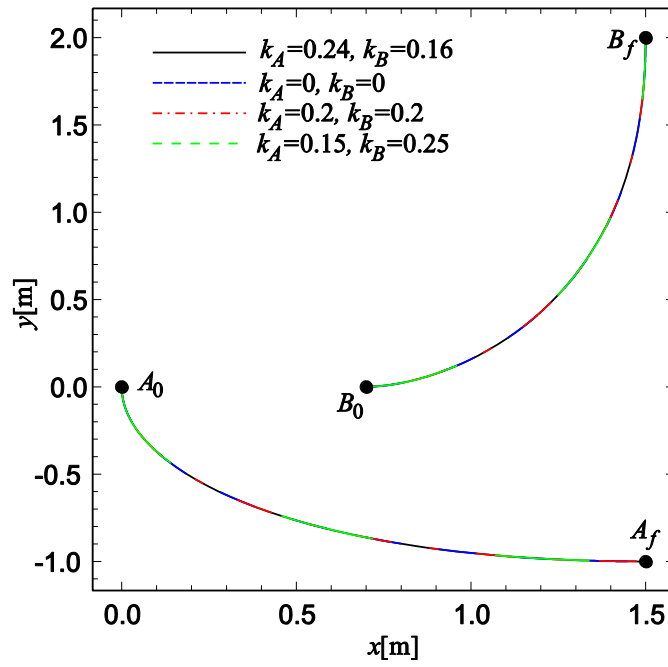
закони промене управљања $u(t) = \dot{V}_A(t)$ при различитим вредностима константи k_A и k_B , а при вредности крутости опруге $k = 15\text{N/m}$. Графички приказ генералисаних координата $q^1(t) = \varphi(t)$ и $q^2(t) = \zeta(t)$ дат је на слици 6.4, док су на слици 6.5 приказани закони промене брзина $V_A(t)$ и $V_B(t)$.

Табела 6.1 Решења ТРВРР при различитим вредностима крутости опруге k ($k_A = 0,24\text{1/s}$, $k_B = 0,16\text{1/s}$)

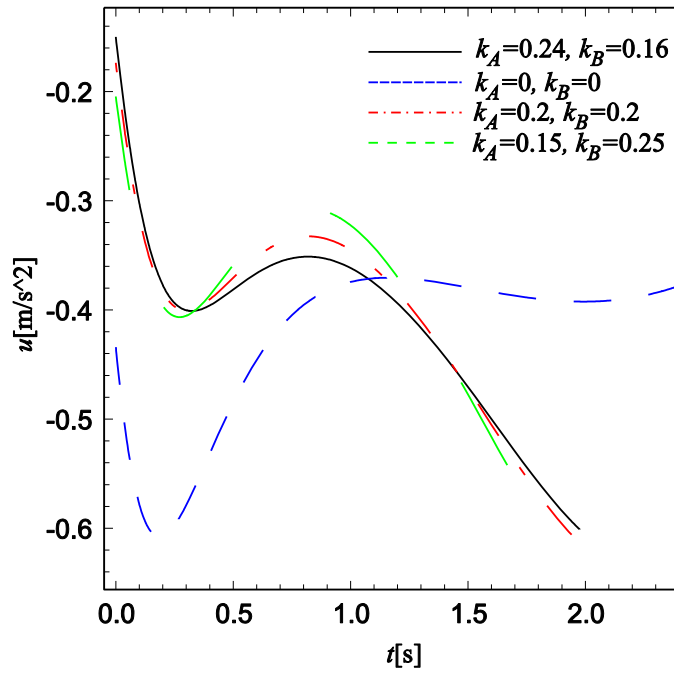
$k[\text{N/m}]$	$t_f[\text{s}]$	$V_{A_f}[\text{m/s}]$	$V_{B_f}[\text{m/s}]$	$\lambda_y[\text{s/m}]$	$\lambda_{\varphi_f}[\text{s}]$
0	1,887845	0,758336	1,724517	-0,136332	0,452609
15	1,975945	0,560889	1,397304	-0,056890	0,314079
25	2,063311	0,386415	1,118965	0,022735	0,183662
35	2,212967	0,155469	0,707516	0,149008	0,008807

Табела 6.2 Решења ТРВРР при различитим вредностима константи k_A и k_B ($k = 15\text{N/m}$)

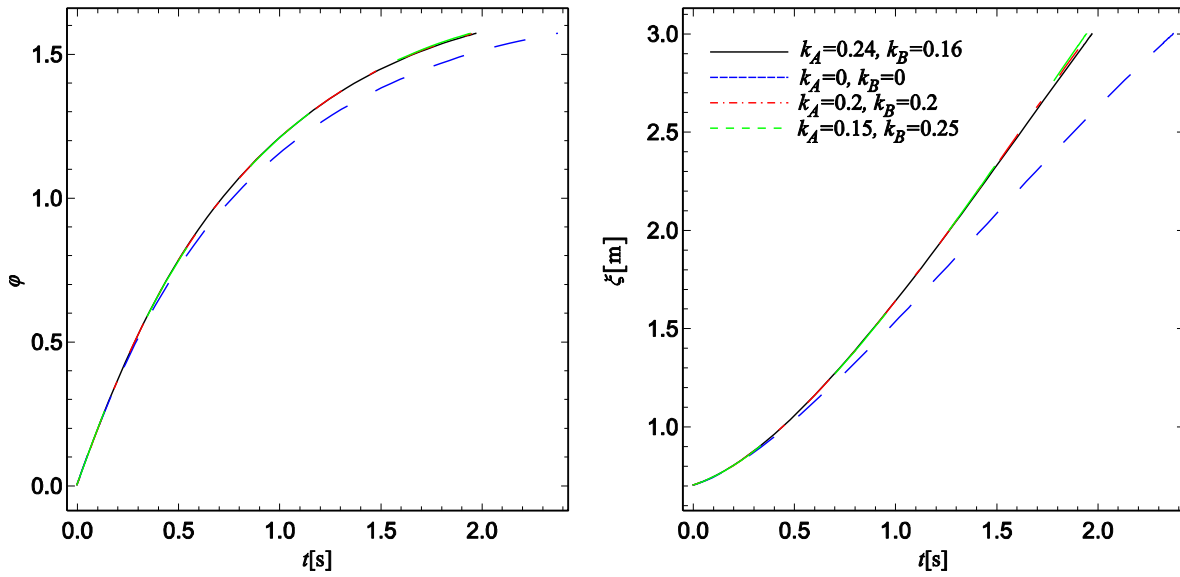
$k_A[\text{1/s}], k_B[\text{1/s}]$	$t_f[\text{s}]$	$V_{A_f}[\text{m/s}]$	$V_{B_f}[\text{m/s}]$	$\lambda_y[\text{s/m}]$	$\lambda_{\varphi_f}[\text{s}]$
$k_A = k_B = 0$	2,378646	0,370029	0,941052	-0,150652	0,363346
$k_A = 0,24,$ $k_B = 0,16$	1,975945	0,560889	1,397304	-0,056890	0,314079
$k_A = k_B = 0,2$	1,961746	0,575696	1,434750	-0,025801	0,242769
$k_A = 0,15,$ $k_B = 0,25$	1,948230	0,588493	1,476443	0,015803	0,150076



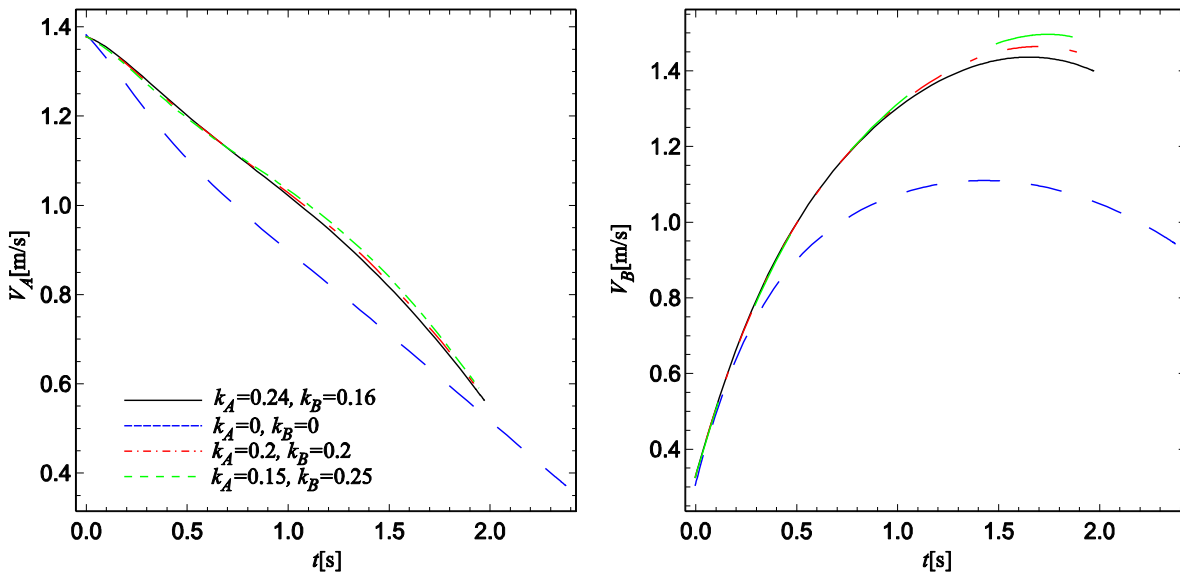
Слика 6.2 Трајекторије тачака A и B



Слика 6.3 Оптимално управљање $u(t) = \dot{V}_A(t)$



Слика 6.4 Угао φ и релативна координате ζ

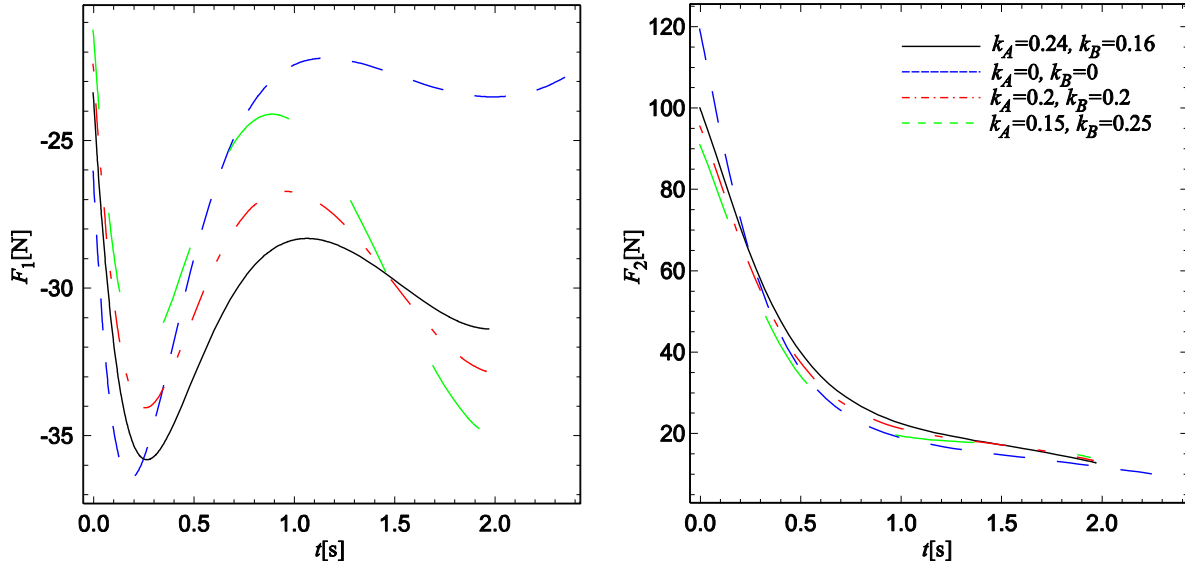


Слика 6.5 Брзине V_A и V_B

Према (6.63), управљачке силе F_1 и F_2 сада се могу изразити у следећем облику

$$\begin{aligned}
 F_1 &= m_A(u - k_A v), \\
 F_2 &= -m_A \frac{V_A}{V_B}(u - k_A v),
 \end{aligned}
 \tag{6.82}$$

чији су закони промене приказани на слици 6.6. Упоредивањем израза (6.82) са (1.255), евидентно је да су добијени изрази идентични ако се има притом у виду (6.77).



Слика 6.6 Управљачке силе $F_1(t)$ и $F_2(t)$

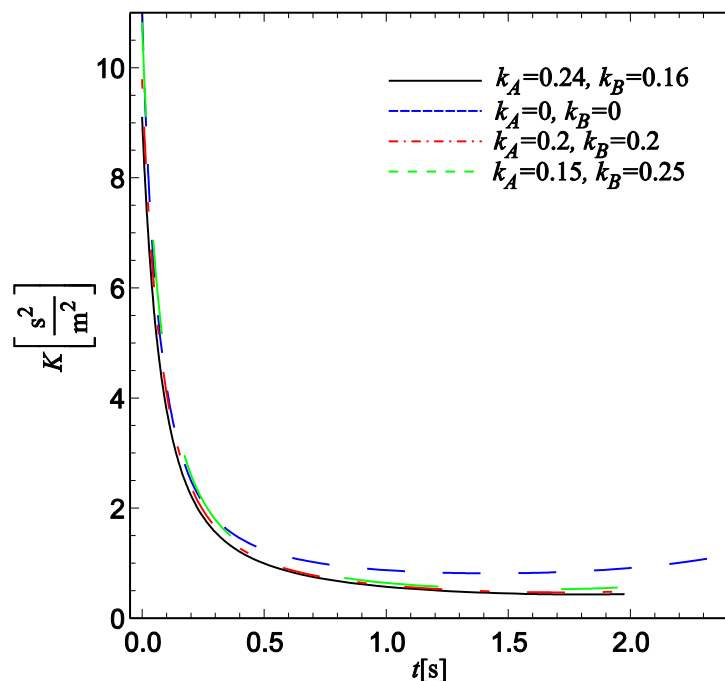
Оптимално управљање u представља сингуларно управљање првог реда. Неопходан Келијев услов оптималности за сингуларно управљања првог реда гласи

$$-\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\partial H}{\partial u} \right] \right) \leq 0, \quad (6.83)$$

који се може приказати у следећем облику

$$\begin{aligned} K \equiv \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\partial H}{\partial u} \right] \right) &= \frac{1}{m_0 V_B^4} e^{2(-k_A + k_B)\tau} \left[m_0 \lambda_\xi V_B \left(V_A^2 + e^{(k_A - k_B)\tau} V_B^2 \right) \right. \\ &+ v_2 \left(\left(e^{k_B \tau} k(L + l_0) + k_B m_0 v - e^{k_B \tau} k \xi \right) V_A^2 \right. \\ &\left. \left. + e^{(k_A - k_B)\tau} V_B^2 \left(e^{k_B \tau} kL + e^{k_B \tau} k l_0 + k_B m_0 v - e^{k_B \tau} k \xi + (k_A - k_B) m_0 V_B \right) \right) \right] \geq 0, \end{aligned} \quad (6.84)$$

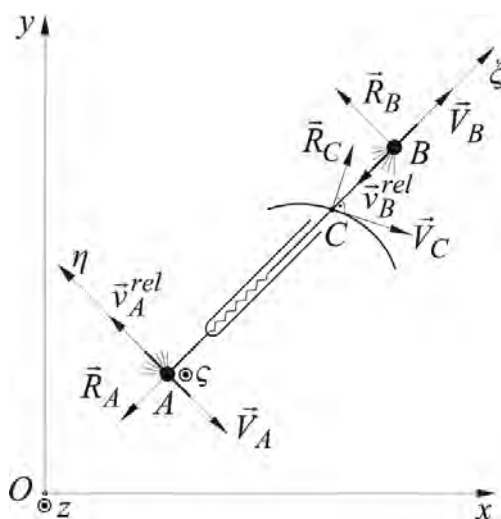
где је $\tau = t$. На слици 6.7 приказани су закони промене функција K из (6.84), за различите вредности константи k_A и k_B при вредности крутости опруге $k = 15\text{N/m}$, одакле је евидентно да је услов (6.83) испуњен.



Слика 6.7 Нумеричка потврда Келијевог услова оптималности (6.83)

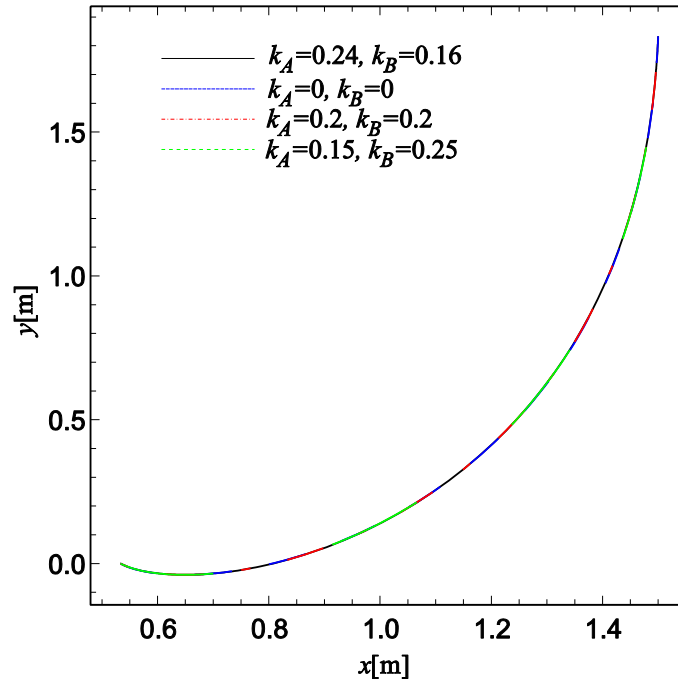
Други вид реализације кретања је посредством глатке вођице чија се линија путање поклапа са трајекторијом тачке C , која се налази на растојању $\overline{BC} = 1/6 \text{ m}$, тако да су параметарске једначине линије вођице

$$\begin{aligned} x_C(t) &= x + (\zeta - \overline{BC}) \cos \varphi, \\ y_C(t) &= y + (\zeta - \overline{BC}) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (6.85)$$



Слика 6.8 Реализација брахистохроног кретања система посредством глатке вођице

На слици 6.8 \vec{R}_C представља реакцију накнадно наметнуте механичке везе–глатке вођице, при чему је $\vec{R}_C \cdot \vec{V}_C = 0$. На слици 6.9 приказане су трајекторије тачке C при различитим вредностима константи k_A и k_B .



Слика 6.9 Трајекторије тачке C при различитим вредностима константи k_A и k_B
($k = 15\text{N/m}$)

6.3.1 Решење проблема оптималног управљања за случај ограничених управљачких сила

У овом делу разматра се брахистохроно кретање нехолономног механичког система променљиве масе за случај ограничене управљачке силе F_2 до фиксних граница

$$F^* \leq F_2 \leq F^{**}, \quad (6.86)$$

где су $F^* = -60\text{N}$ и $F^{**} = 60\text{N}$. На основу (6.82) и (6.87), добија се следеће ограничење управљања u

$$F^* \leq -m_A \frac{V_A}{V_B} (u - k_A v) \leq F^{**}. \quad (6.87)$$

На основу графичког приказа управљачке силе F_2 , датог на слици 6.6, не умањујући општост разматрања, структура оптималног управљања има следећи облик

$$u = \begin{cases} k_A v - \frac{V_B}{m_A V_A} F^{**}, & 0 \leq t \leq t_1, \\ u_{\text{sing}}, & t_1 < t \leq t_f \end{cases}, \quad (6.88)$$

где је t_1 тренутак прекида функције управљања $u(t)$. Одговарајући услови спрезања између сингуларног и несингуларног дела екстремалног управљања, који представљају неопходне услове за оптимално спрезање, морају бити задовољени, што је одређено Теоремом 1 из [McDanell, Powers, 1971; Odia, Bell, 2012]. Како је $q = 1$ и $r = 0$, односно $q + r = 1$, на основу Теореме 1 [McDanell, Powers, 1971; Odia, Bell, 2012] можемо закључити да је неопходан услов за оптимално спрезање испуњен. На интервалу $(t_1, t_f]$, који одговара сингуларном делу управљања u_{sing} , важе једначине основног и спрегнутог система одређене у претходном делу овог поглавља. На интервалу $[0, t_1]$, који одговара несингуларном делу управљања

$u = k_A v - \frac{V_B}{m_A V_A} F^{**}$, важе једначине стања које сада имају следећи облик

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{V_A}{\zeta}, \\ \dot{\zeta} &= V_B, \\ \dot{x} &= V_A \sin \varphi, \\ \dot{y} &= -V_A \cos \varphi, \\ \dot{t} &= 1, \\ \dot{V}_A &= k_A v - \frac{V_B}{m_0 e^{-k_A \tau} V_A} F^{**}, \\ \dot{V}_B &= \frac{F^{**} - k(\zeta - L - l_0) + m_0 e^{-k_B \tau} k_B v}{m_0 e^{-k_B \tau}}. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Сада, из услова (6.50), имајући у виду притом (6.51), можемо изразити координату $\lambda_\zeta(t_f)$ спрегнутог вектора у следећем облику

$$\lambda_\xi(t_f) = \frac{1}{\xi(t_f)V_B(t_f)} \left[\xi(t_f) - \lambda_\varphi(t_f)V_A(t_f) + \lambda_y \xi(t_f)V_A(t_f) \cos \varphi(t_f) - \lambda_x \xi(t_f)V_A(t_f) \sin \varphi(t_f) \right]. \quad (6.90)$$

Спрегнути систем диференцијалних једначина, који одговара несингуларном делу

управљања $u = k_A v - \frac{V_B}{m_A V_A} F^{**}$, има следећи облик

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} = -(\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi)V_A, \\ \dot{\lambda}_\xi &= -\frac{\partial H}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial F_2}{\partial \xi} = \frac{kv_2}{m_0 e^{-k_B \tau}} + \frac{\lambda_\varphi V_A}{\xi^2}, \\ \dot{\lambda}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \mu \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0, \\ \dot{\lambda}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} + \mu \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0, \\ \dot{\lambda}_\tau &= -\frac{\partial H}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial F_2}{\partial \tau} \\ &= \frac{v_2 \left[F^{**} (k_A - k_B) + k(\xi - L - l_0)k_B \right]}{m_0 e^{-k_B \tau}} - \mu F^{**} k_A, \\ \dot{v}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial V_A} + \mu \frac{\partial F_2}{\partial V_A} \\ &= \lambda_y \cos \varphi - \frac{\lambda_\varphi}{\xi} - \lambda_x \sin \varphi - \frac{F^{**} v_2}{m_0 e^{-k_B \tau} V_A} + \mu \frac{F^{**}}{V_A}, \\ \dot{v}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial V_B} + \mu \frac{\partial F_2}{\partial V_B} = -\lambda_\xi + \frac{F^{**} v_2}{m_0 e^{-k_B \tau} V_B} - \mu \frac{F^{**}}{V_B}, \end{aligned} \quad (6.91)$$

где је μ множитељ који одговара релацији ограничења (6.87). На сингуларном делу оптималне трајекторије $\mu \equiv 0$ (видети [Leitmann, 1966]), док се вредност множитеља μ на несингуларном делу оптималне трајекторије одређује из услова [Leitmann, 1966]

$$\frac{\partial H}{\partial u} + \mu \frac{\partial}{\partial u} (F^{**} - F_2) = 0, \quad (6.92)$$

односно [Leitmann, 1966]

$$\mu = \frac{\frac{\partial H}{\partial u}}{\frac{\partial F_2}{\partial u}} = \frac{e^{k_B \tau} v_2 V_A - e^{k_A \tau} v_1 V_B}{m_0 V_A}. \quad (6.93)$$

На основу (6.49) и (6.51), могу се формирати следећи услови трансверзалности у почетном и крајњем тренутку респективно

$$V_B(0)v_1(0) - V_A(0)v_2(0) = 0, \quad (6.94)$$

$$\lambda_\tau(t_f) = 0, v_1(t_f) = 0, v_2(t_f) = 0. \quad (6.95)$$

Седмопараметарски шутинг састоји се у одређивању непознатих координата $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_\varphi(t_f)$ спрегнутог вектора, брзина $V_A(t_f), V_B(t_f)$ тачака A и B система у крајњем тренутку t_f , тренутака t_1 прекида функције управљања, као и крајњег тренутка t_f . Нумерички поступак применом кога ћемо решити Кошијев проблем, може се представити у неколико следећих корака:

– У првом кораку, погодно је извршити нумеричку интеграцију диференцијалних једначина уназад, на интервалу $[t_f, t_1)$, који одговара сингуларном делу управљања u_{sing} , са почетним условима

$$\begin{aligned} \varphi(t_f) &= \pi/2, \quad \zeta(t_f) = 3a, \quad x(t_f) = 1,5a, \quad y(t_f) = -a, \quad \tau(t_f) = t_f, \\ V_A(t_f) &= V_{Af}, \quad V_B(t_f) = V_{Bf}, \quad \lambda_\varphi(t_f) = \lambda_{\varphi f}, \\ \lambda_\zeta(t_f) &= \frac{\zeta_f - \lambda_{\varphi f} V_{Af} + \lambda_y \zeta_f V_{Af} \cos \varphi_f - \lambda_x \zeta_f V_{Af} \sin \varphi_f}{\zeta_f V_{Bf}}, \\ v_1(t_f) &= 0, \quad v_2(t_f) = 0, \end{aligned} \quad (6.96)$$

где су $\varphi_f = \varphi(t_f)$, $\zeta_f = \zeta(t_f)$ и $\lambda_{\varphi f} = \lambda_\varphi(t_f)$. На основу извода по времену функције прекида, може се формирати следећа функционална зависност у нумеричком облику $\{H_1, H_0\}(t_1) = \Gamma_1(t_f, t_1, V_{Af}, V_{Bf}, \lambda_{\varphi f}, \lambda_x, \lambda_y)$.

– У другом кораку, погодно је такође извршити нумеричку интеграцију диференцијалних једначина (6.89) и (6.91), имајући притом у виду (6.93), уназад, на

интервалу $[t_1, 0]$, који одговара несингуларном делу управљања $u = k_A v - \frac{V_B}{m_A V_A} F^{**}$,

са почетним условима $\varphi(t_1), \zeta(t_1), x(t_1), y(t_1), \tau(t_1), V_A(t_1), V_B(t_1), \lambda_\varphi(t_1), \lambda_\zeta(t_1)$

, $v_1(t_1)$ и $v_2(t_1)$ који се добијају као решења нумеричке интеграције извршене у

претходном кораку. На основу одређеног почетног положаја (6.78) система, могу се

формирати следеће функционалне зависности у нумеричком облику

$$\varphi(0) - \varphi_0 = \Gamma_2(t_f, t_1, V_{Af}, V_{Bf}, \lambda_{\varphi f}, \lambda_x, \lambda_y), \zeta(0) - \zeta_0 = \Gamma_3(t_f, t_1, V_{Af}, V_{Bf}, \lambda_{\varphi f}, \lambda_x, \lambda_y),$$

$$x(0) - x_0 = \Gamma_4(t_f, t_1, V_{Af}, V_{Bf}, \lambda_{\varphi f}, \lambda_x, \lambda_y) \quad \text{и} \quad y(0) - y_0 = \Gamma_5(t_f, t_1, V_{Af}, V_{Bf}, \lambda_{\varphi f}, \lambda_x, \lambda_y)$$

које одговарају временском тренутку $t_0 = 0$. На основу познате вредности механичке

енергије (6.78) система у почетном тренутку, може се формирати следећа

функционална зависност у нумеричком облику $0,5 m_0 (V_A^2(0) + V_B^2(0)) - E_0 =$

$\Gamma_6(t_f, t_1, V_{Af}, V_{Bf}, \lambda_{\varphi f}, \lambda_x, \lambda_y)$, док се на основу услова трансверзалности (6.94) може

успоставити следећа функционална зависност у нумеричком облику

$$V_B(0)v_1(0) - V_A(0)v_2(0) = \Gamma_7(t_f, t_1, V_{Af}, V_{Bf}, \lambda_{\varphi f}, \lambda_x, \lambda_y).$$

Сада се може формирати шутинг функција

$$\Gamma(z) = [\Gamma_1(z), \Gamma_2(z), \Gamma_3(z), \Gamma_4(z), \Gamma_5(z), \Gamma_6(z), \Gamma_7(z)]^T = \mathbf{0}_{7 \times 1}, \quad (6.97)$$

где су $\Gamma(z) \in \mathbb{R}^{7 \times 1}$ и $z = [t_f, t_1, V_{Af}, V_{Bf}, \lambda_{\varphi f}, \lambda_x, \lambda_y]$. У табели 6.3 приказане су

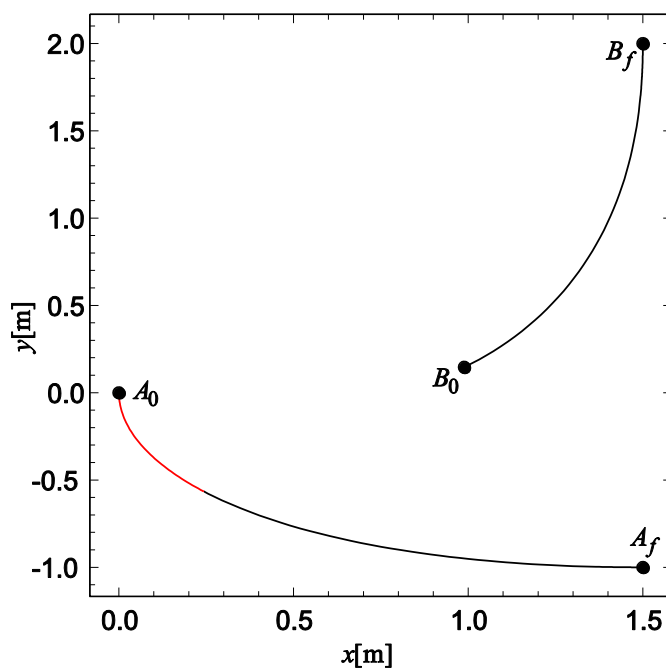
недостајуће граничне вредности за случај ограничене управљачке силе F_2 за

различите вредности константи k_A и k_B , а при вредности крутости опруге

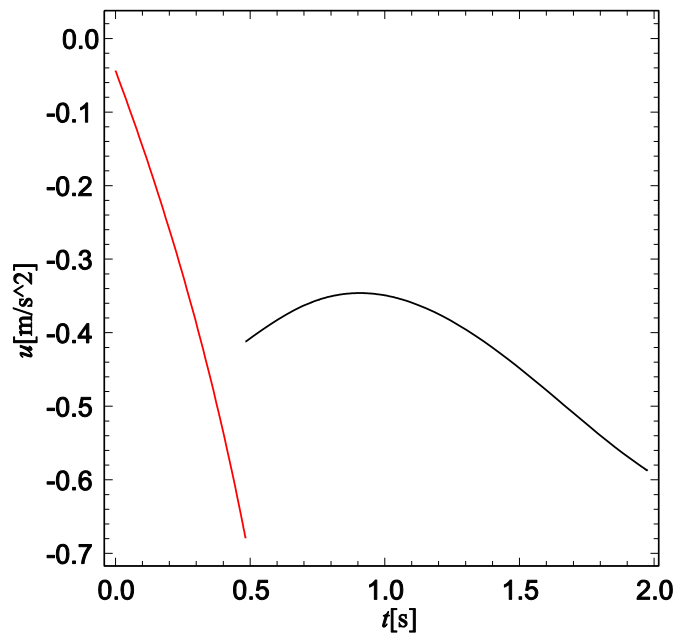
$k = 15 \text{ N/m}$.

Табела 6.3 Решења TPBVP за случај ограничене управљачке силе F_2 при различитим вредностима константи k_A и k_B ($k = 15\text{N/m}$)

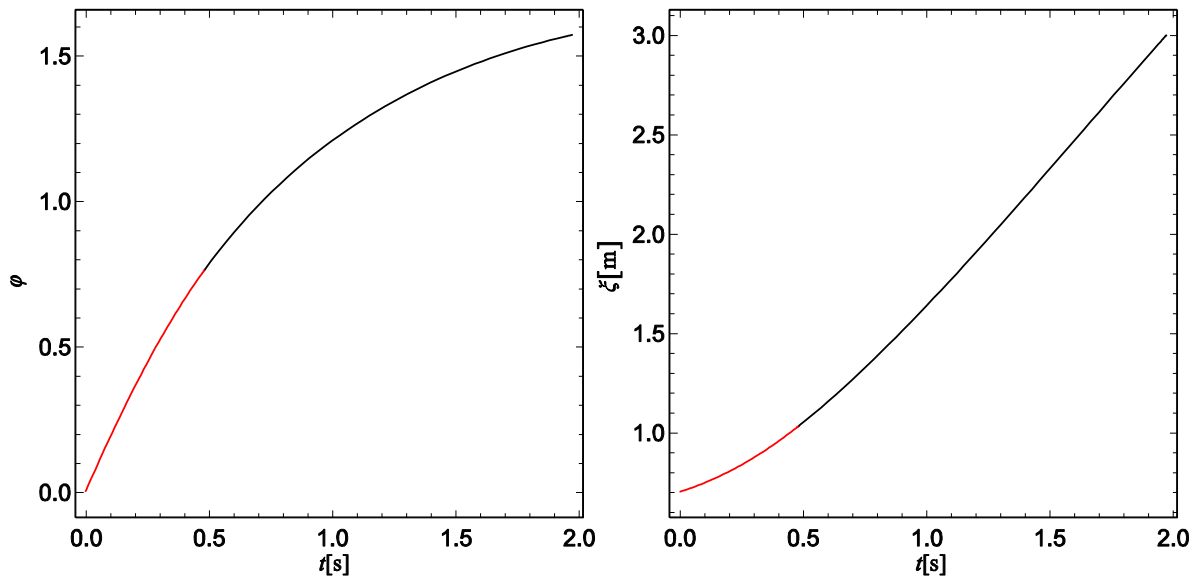
$k_A[1/\text{s}],$ $k_B[1/\text{s}]$	$t_f[\text{s}]$	$t_1[\text{s}]$	$V_{A_f}\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$	$V_{B_f}\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$	$\lambda_x\left[\frac{\text{s}}{\text{m}}\right]$	$\lambda_y\left[\frac{\text{s}}{\text{m}}\right]$	$\lambda_{\varphi_f}[\text{s}]$
$k_A = 0,$ $k_B = 0$	2,37884	0,48774	0,37696	0,93830	0,26729	-0,10252	0,30412
$k_A = 0,24,$ $k_B = 0,16$	1,97605	0,48294	0,57168	1,39366	0,12827	-0,02411	0,27439
$k_A = 0,2,$ $k_B = 0,2$	1,96181	0,42792	0,58244	1,43210	0,17142	-0,00459	0,21679
$k_A = 0,15,$ $k_B = 0,25$	1,94827	0,37081	0,59233	1,47463	0,23200	0,02862	0,13418



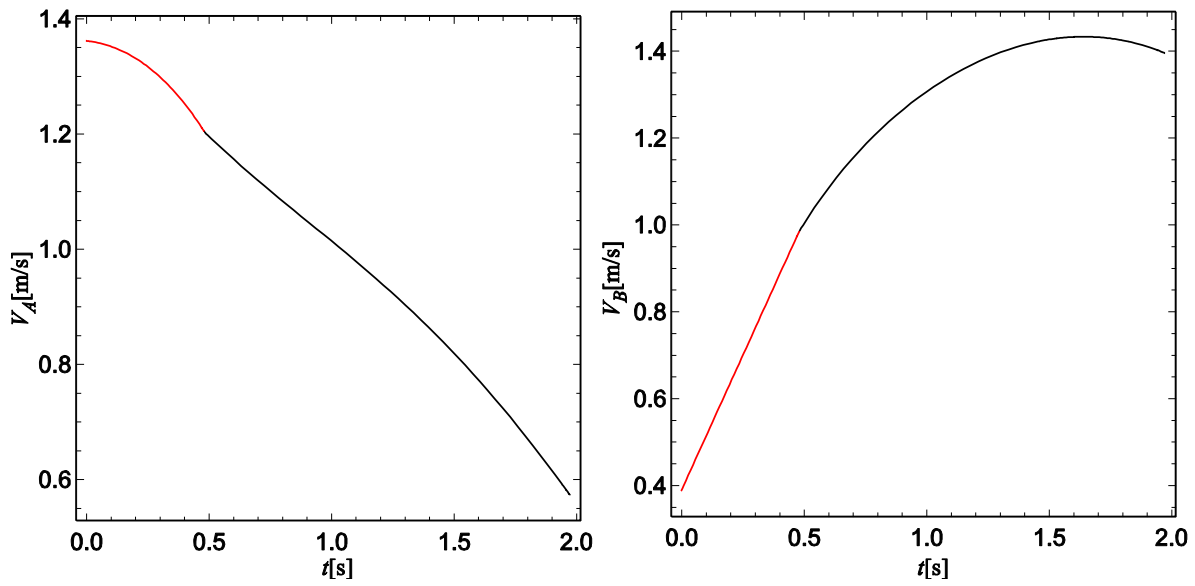
Слика 6.10 Трајекторије тачака A и B за случај ограничене управљачке силе F_2 при вредностима $k_A = 0,24$ и $k_B = 0,16$ ($k = 15\text{N/m}$)



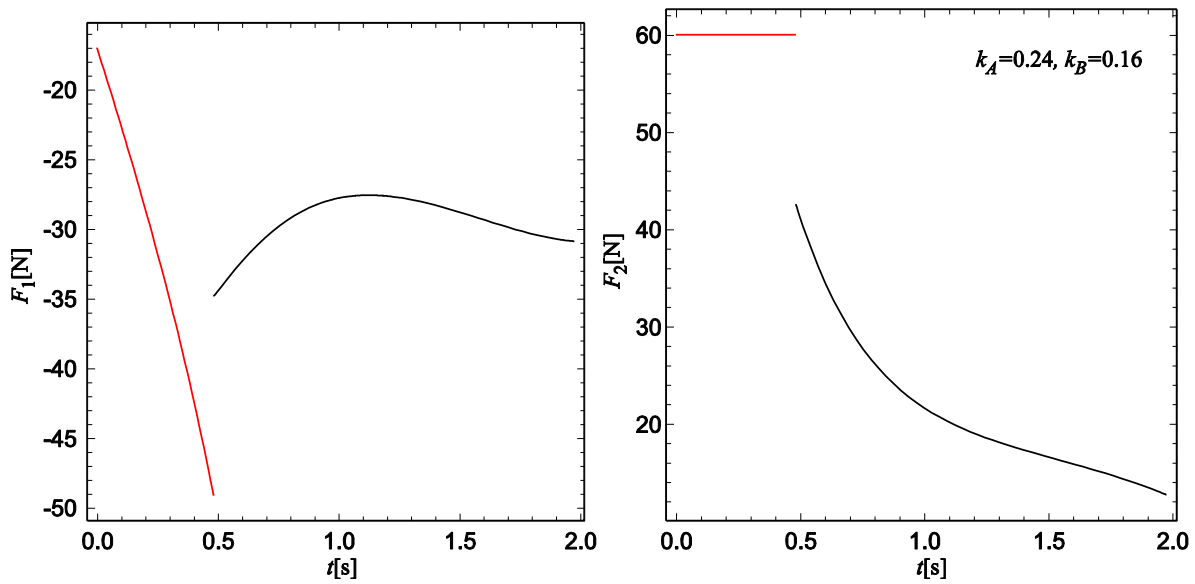
Слика 6.11 Оптимално управљање $u(t) = \dot{V}_A(t)$ за случај ограничене управљачке силе F_2 при вредностима $k_A = 0,24$ и $k_B = 0,16$ ($k = 15\text{N/m}$)



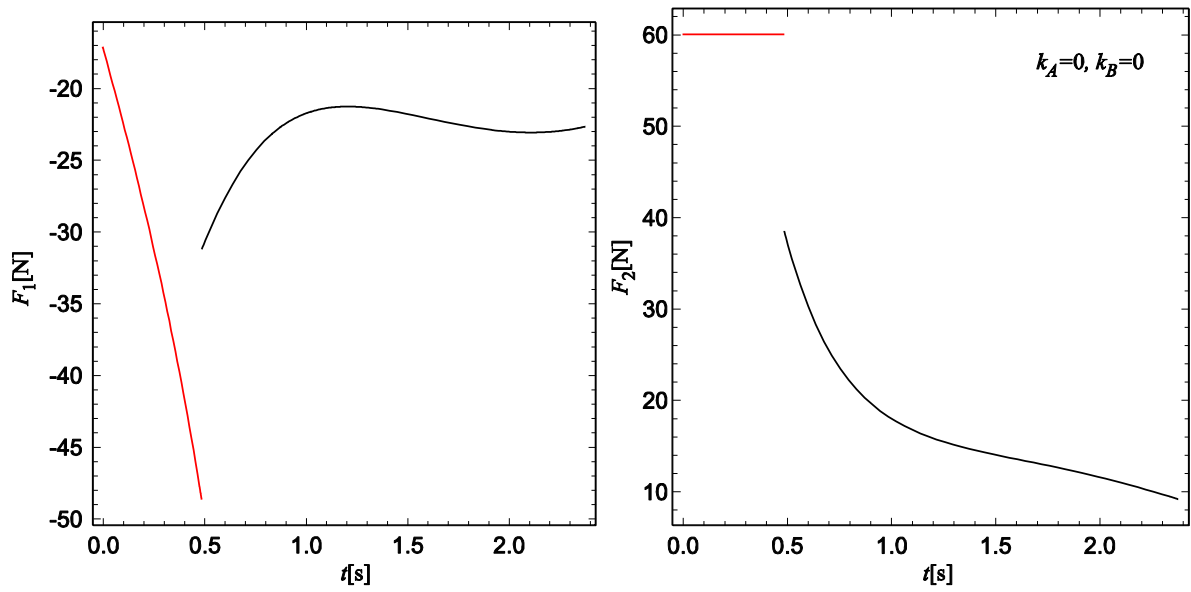
Слика 6.12 Угао φ и релативна координате ζ за случај ограничене управљачке силе F_2 при вредностима $k_A = 0,24$ и $k_B = 0,16$ ($k = 15\text{N/m}$)



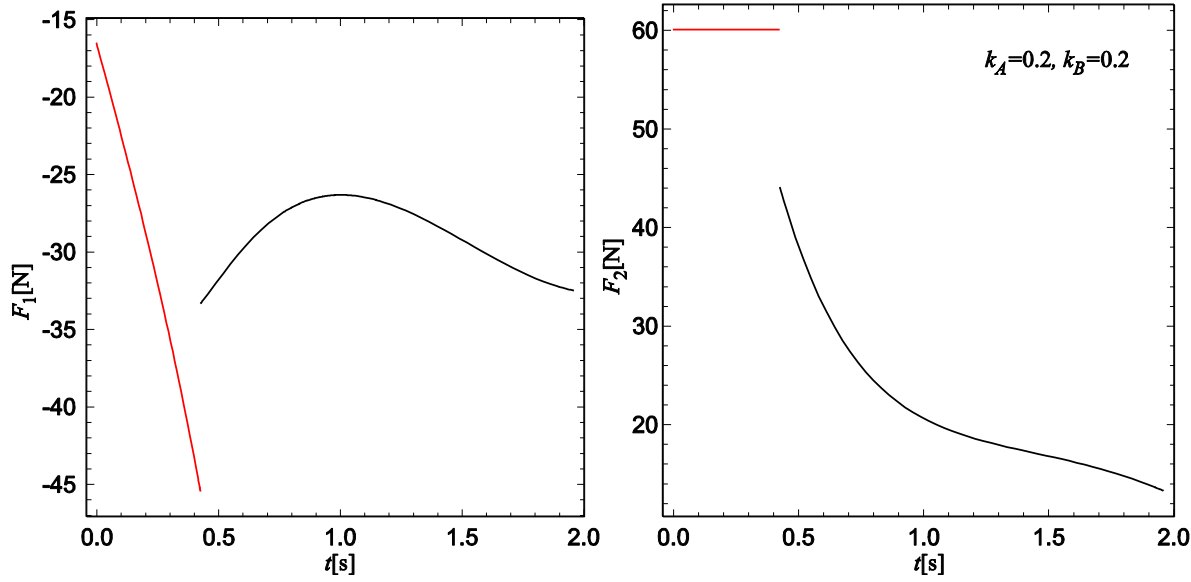
Слика 6.13 Брзине V_A и V_B за случај ограничене управљачке силе F_2 при вредностима $k_A = 0,24$ и $k_B = 0,16$ ($k = 15\text{N/m}$)



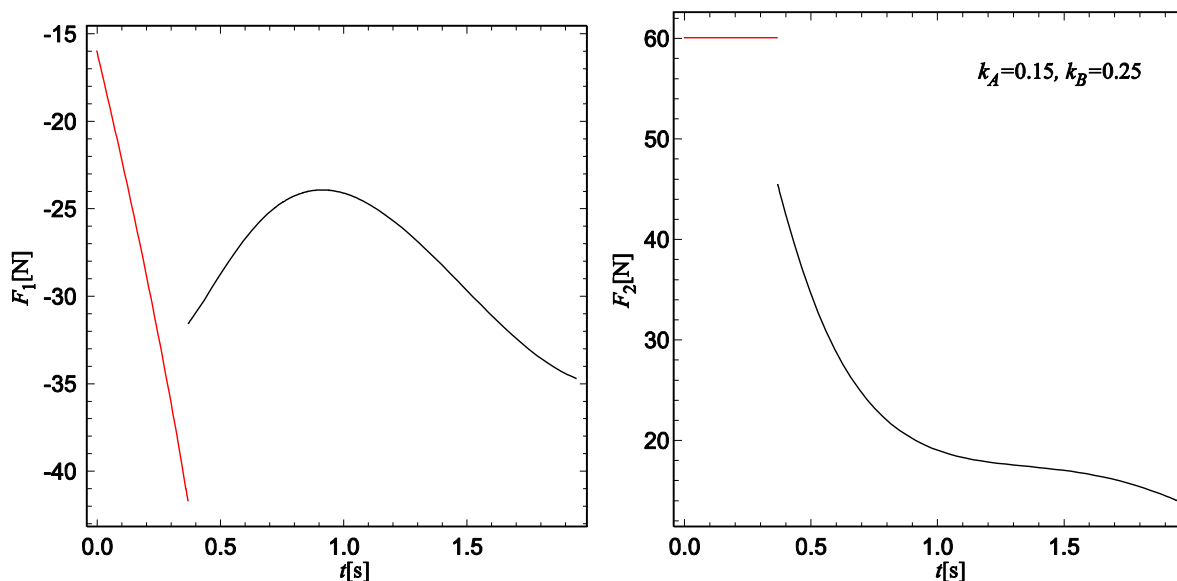
Слика 6.14 Управљачке силе $F_1(t)$ и $F_2(t)$ за случај ограничене управљачке силе F_2 при вредностима $k_A = 0,24$ и $k_B = 0,16$ ($k = 15\text{N/m}$)



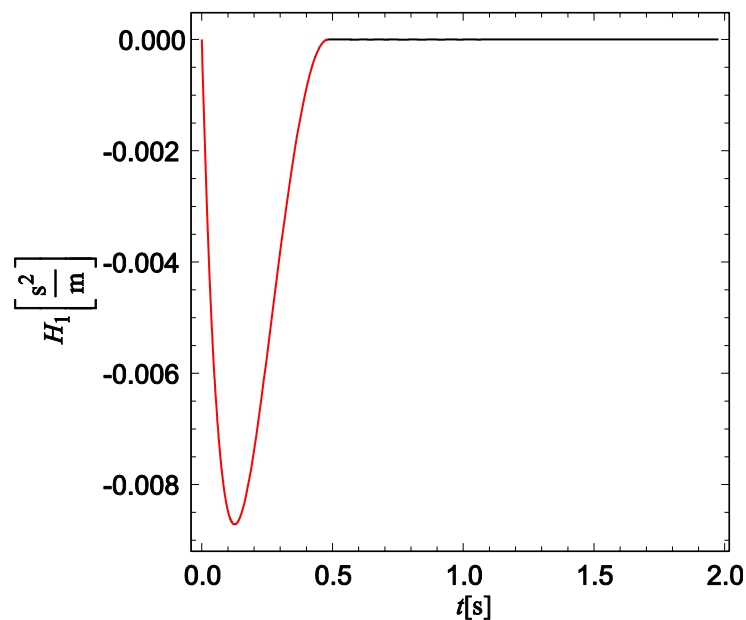
Слика 6.15 Управљачке силе $F_1(t)$ и $F_2(t)$ за случај ограничене управљачке силе F_2 при вредностима $k_A = 0$ и $k_B = 0$ ($k = 15\text{N/m}$)



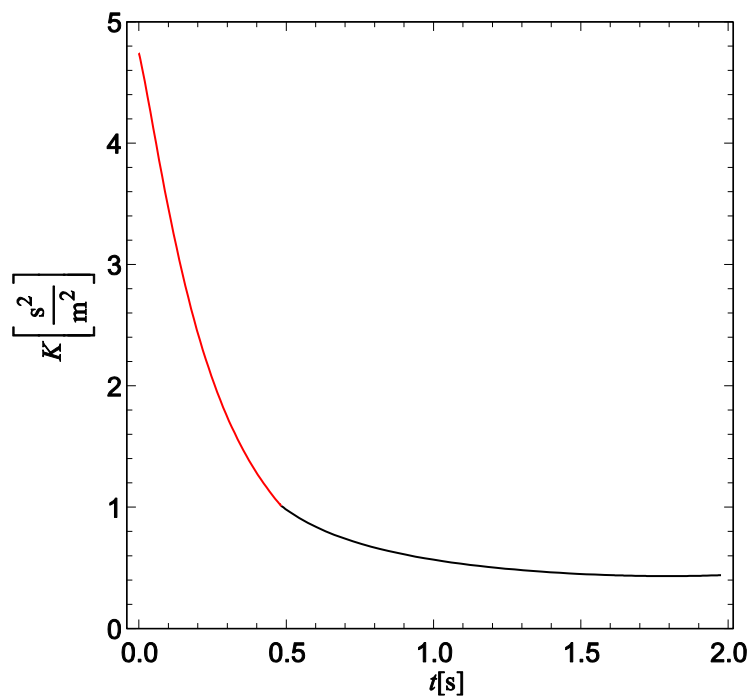
Слика 6.16 Управљачке силе $F_1(t)$ и $F_2(t)$ за случај ограничене управљачке силе F_2 при вредностима $k_A = 0,2$ и $k_B = 0,2$ ($k = 15\text{N/m}$)



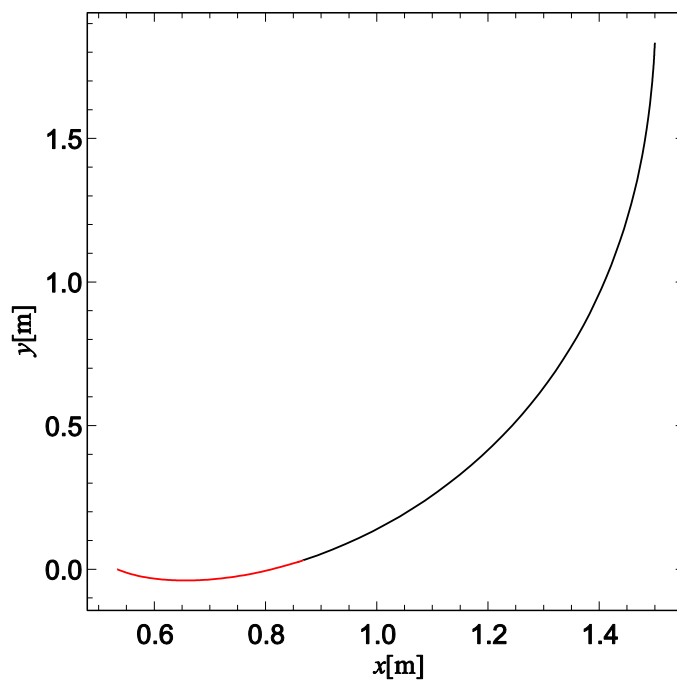
Слика 6.17 Управљачке силе $F_1(t)$ и $F_2(t)$ за случај ограничене управљачке силе F_2 при вредностима $k_A = 0,15$ и $k_B = 0,25$ ($k = 15\text{N/m}$)



Слика 6.18 Функција прекида $H_1 = v_1 - \frac{m_A V_A}{m_B V_B} v_2$ за случај ограничене управљачке силе F_2 при вредностима $k_A = 0,24$ и $k_B = 0,16$ ($k = 15\text{N/m}$)



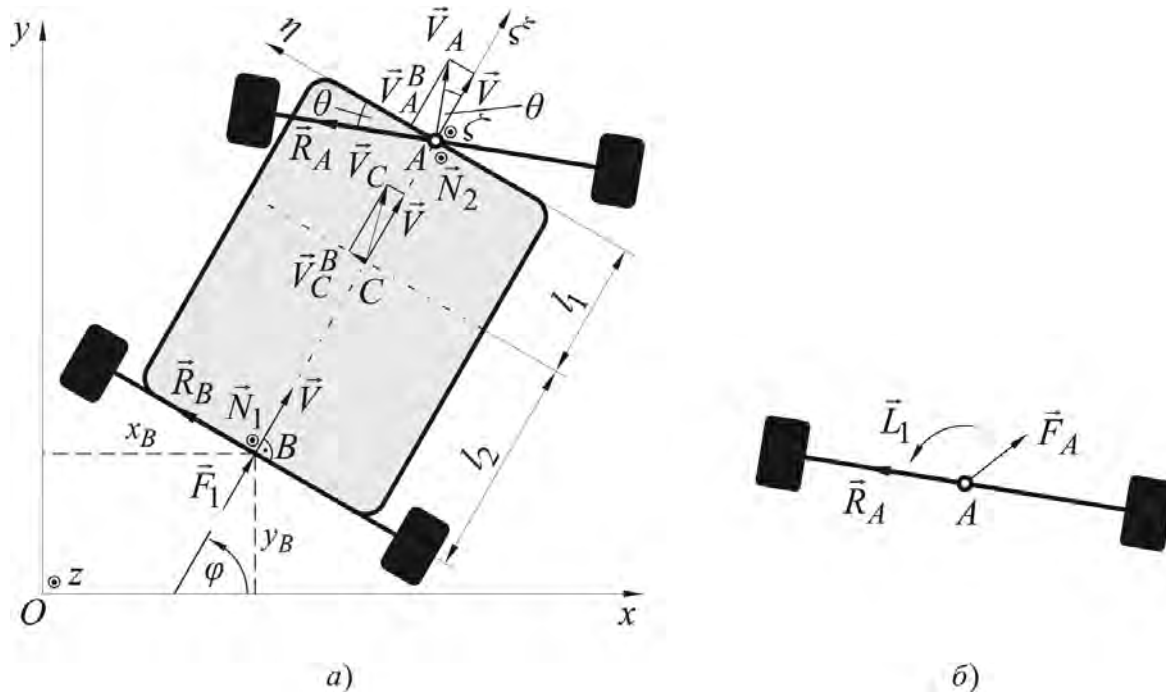
Слика 6.19 Функција K за случај ограничене управљачке силе F_2 при вредностима $k_A = 0,24$ и $k_B = 0,16$ ($k = 15\text{N/m}$)



Слика 6.20 Трајекторија тачке C за случај ограничене управљачке силе F_2 при вредностима $k_A = 0,24$ и $k_B = 0,16$ ($k = 15\text{N/m}$)

6.4 Нумерички пример 2

Сада се разматра упрошћен модел возила (видети слику 6.21) чији је детаљан опис дат у Поглављу 1.



Слика 6.21 а) Упрошћен модел возила; б) Предња осовина

Нехолономне хомогене везе које ограничавају кретање разматраног возила, на основу (1.281), имају следећи облик

$$\begin{aligned}\psi^3 &\equiv -\dot{x}_B \sin \varphi + \dot{y}_B \cos \varphi = 0, \\ \psi^4 &\equiv -\dot{x}_A \sin(\varphi + \zeta) + \dot{y}_A \cos(\varphi + \zeta) = 0,\end{aligned}\tag{6.98}$$

где су $x_A = x_B + (l_1 + l_2) \cos \varphi$ и $y_A = y_B + (l_1 + l_2) \sin \varphi$. Услед наметнутих ограничења кретања (6.98), јављају се хоризонталне реакције

$$\vec{R}_A = -R_A \sin \theta \vec{\lambda} + R_A \cos \theta \vec{\mu} \quad \text{и} \quad \vec{R}_B = R_B \vec{\mu},\tag{6.99}$$

нехолономних веза у тачкама A и B возила респективно. За независне квазибрзине изаберимо брзину V тачке B возила, као и релативну угаону брзину ω_θ предње осовине респективно

$$\begin{aligned}\dot{\pi}^1 &= V = \dot{x}_B \cos \varphi + \dot{y}_B \sin \varphi, \\ \dot{\pi}^2 &= \omega_\zeta = \dot{\zeta},\end{aligned}\tag{6.100}$$

где су $V = \vec{V} \cdot \vec{\lambda}$ и $\omega_\theta = \vec{\omega}_\theta \cdot \vec{v}$. Све генерализане брзине сада се могу изразити у функцији независних квазибрзина

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{V}{l} \tan \zeta, \\ \dot{\zeta} &= \omega_\zeta, \\ \dot{x}_B &= V \cos \varphi, \\ \dot{y}_B &= V \sin \varphi,\end{aligned}\tag{6.101}$$

где је $l = l_1 + l_2$ међуосовинско растојање. Кинетичка енергија возила, према (6.7) и (1.284), одређена је следећим изразом

$$T^* = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \dot{\pi}^\alpha \dot{\pi}^\beta = \frac{1}{2} \left(M + \frac{J^*}{l^2} \tan^2 \zeta \right) V^2 + \frac{J_2}{l} \tan \zeta V \omega_\zeta + \frac{1}{2} J_2 \omega_\zeta^2, \tag{6.102}$$

где су $M = M_1 + M_2$, $J = J_1 + J_2$ и $J^* = M_1 l_2^2 + M_2 l^2 + J$. Будући да је укупна снага управљачких сила једнака нули, важи „закон” о одржању укупне механичке енергије возила

$$\frac{dT}{dt} = F_1 V + L_1 \omega_\zeta = 0, \tag{6.103}$$

односно

$$\Theta \equiv M V^2 + J^* \omega^2 + 2 J_2 \omega \omega_\zeta + J_2 \omega_\zeta^2 - 2 T_0 = 0, \tag{6.104}$$

где је $\omega = \dot{\phi}$, док је $T_0 \in \mathbb{R}$ кинетичка енергија возила у почетном тренутку $t_0 = 0$.

Диференцијалне једначине кретања возила, на основу (1.285), имају следећи облик

$$\begin{aligned}\left(M + \frac{J^*}{l^2} \tan^2 \zeta \right) \dot{V} + \frac{J_2}{l} \tan \zeta \dot{\omega}_\zeta &= F_1 - \frac{J^*}{l^2} \frac{\tan \zeta}{\cos^2 \zeta} V \omega_\zeta, \\ \frac{J_2}{l} \tan \zeta \dot{V} + J_2 \dot{\omega}_\zeta &= L_1 - \frac{J_2}{l} \frac{1}{\cos^2 \zeta} V \omega_\zeta,\end{aligned}\tag{6.105}$$

где је $\cos \zeta = V / \sqrt{V^2 + l^2 \omega^2}$. Релације Φ_1 и Φ имају следећи облик

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= -\frac{MV^2 + J^* \omega^2 + J_2 \omega \omega_\zeta}{J_2 V (\omega + \omega_\zeta)}, \\ \Phi &= -\frac{J^* \omega + J_2 \omega_\zeta}{J_2 l (\omega + \omega_\zeta) \cos^2 \zeta} V \omega_\zeta,\end{aligned}\tag{6.106}$$

па се према (6.22), $\dot{\omega}_\zeta$ може изразити у следећем облику

$$\dot{\omega}_\zeta = -\frac{J^* \omega + J_2 \omega_\zeta}{J_2 l (\omega + \omega_\zeta) \cos^2 \zeta} V \omega_\zeta - \frac{MV^2 + J^* \omega^2 + J_2 \omega \omega_\zeta}{J_2 V (\omega + \omega_\zeta)} \dot{V}.\tag{6.107}$$

Једначине стања (6.29), на основу (6.101) и (6.107), гласе

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{V}{l} \tan \zeta, \\ \dot{\zeta} &= \omega_\zeta, \\ \dot{x}_B &= V \cos \varphi, \\ \dot{y}_B &= V \sin \varphi, \\ \dot{V} &= u, \\ \dot{\omega}_\zeta &= -\frac{J^* \omega + J_2 \omega_\zeta}{J_2 l (\omega + \omega_\zeta) \cos^2 \zeta} V \omega_\zeta - \frac{MV^2 + J^* \omega^2 + J_2 \omega \omega_\zeta}{J_2 V (\omega + \omega_\zeta)} u.\end{aligned}\tag{6.108}$$

Како је $J_1 \gg J_2$, а у циљу формирања једоставнијег задатка оптималног управљања, у изразу (6.104) можемо занемарити чланове $2J_2 \omega \omega_\zeta$ и $J_2 \omega_\zeta^2$, те израз (6.104) добија нови, знатно једоставнији, облик

$$\tilde{\Theta} \equiv MV^2 + J^* \omega^2 - 2T_0 = 0.\tag{6.109}$$

Након диференцирања изрази (6.109) по времену, у могућности смо сада да $\dot{\omega}$ изразимо као

$$\dot{\omega} = -\frac{MV}{J^* \omega} u,\tag{6.110}$$

где је $u = \dot{V}$. Изаберимо сада за независне квазибрзине брзину V тачаке B возила, као и угаону брзину ω возила респективно

$$\begin{aligned}\dot{\pi}^1 &= V = \dot{x}_B \cos \varphi + \dot{y}_B \sin \varphi, \\ \dot{\pi}^2 &= \omega = \dot{\varphi}.\end{aligned}\tag{6.111}$$

Једначине стања, које описују кретање разматраног возила у простору стања, добијају сада следећи облик

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{x}_B &= V \cos \varphi, \\ \dot{y}_B &= V \sin \varphi, \\ \dot{V} &= u, \\ \dot{\omega} &= -\frac{MV}{J^* \omega} u,\end{aligned}\tag{6.112}$$

док је закон промене угла ζ у овом случају одређен као $\zeta = \arctan(\omega l / V)$. Релације Φ_1 и Φ сада имају следећи облик

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= -\frac{MV}{J^* \omega}, \\ \Phi &= 0.\end{aligned}\tag{6.113}$$

Реакције R_A и R_B нехолономних веза, на основу (1.290) и (6.110), добијају сада следећи облик

$$R_A = \frac{\sqrt{V^2 + l^2 \omega^2}}{l \omega} \left[-Mu + (Ml_2 + M_2 l_1) \omega^2 \right],\tag{6.114}$$

$$R_B = \frac{V}{J^* l \omega} \left[J^* M_1 l_1 \omega^2 - (M_1 l_1 l_2 - J) Mu \right].\tag{6.115}$$

Приликом формирања израза за реакције R_A и R_B нехолономних веза, занемарени су чланови $\sqrt{V^2 + l^2 \omega^2} J_2 \ddot{\zeta} / lV$ и $J_2 \ddot{\zeta} / l$ респективно, имајући у виду да је $J_1 \gg J_2$. На основу (6.112), (6.113), (6.114) и (6.115) у могућности смо да формирамо знатно једноставнији задатак оптималног управљања како за случај неограничених, тако и случај ограничених реакција нехолономних веза, где је начињена грешка, као што ће бити показано, занемарљива. Диференцијалне једначине кретања возила, као и реакције нехолономних веза добијене су у складу са ограничењима (6.98). Имајући то у виду, неопходни динамички услови за реализацију кретања у складу са ограничењима (6.98), на основу Кулонових (*Charles-Augustin de Coulomb, 1736-1806*) закона, је да интензитети сила интеракција између точкова предње и задње осовине

возила и хоризонталне равни кретања не прелазе одговарајуће граничне вредности Кулонових сила трења клизања [Soltakhanov, Yushkov, Zegzhda, 2009]. За тачкове предње осовине возила, неопходан динамички услов за реализацију кретања може се написати у виду неједнакости [Soltakhanov, Yushkov, Zegzhda, 2009]

$$\mu_2(t)N_2 = |R_A| < F_2^{gr} = \mu N_2, \quad (6.116)$$

док се приликом формирања неопходног динамичког услов за тачкове задње осовине возила [Soltakhanov, Yushkov, Zegzhda, 2009], мора узети у обзир да је сила интеракције између тачкова задње осовине возила и равни кретања одређена векторским збиром из управљачке силе \vec{F}_1 и реакције \vec{R}_B нехолономне везе, односно

$$\mu_1(t)N_1 = F_B = \sqrt{R_B^2 + F_1^2} < F_1^{gr} = \mu N_1, \quad (6.117)$$

где су: F_1^{gr}, F_2^{gr} – граничне вредности сила трења клизања; μ – статички коефицијент трења клизања између тачкова возила и хоризонталне равни кретања; N_1, N_2 – нормалне реакција равни кретања на задњу и предњу осовину возила респективно; $\mu_1(t), \mu_2(t)$ – закони промене минимално потребних вредности коефицијента трења клизања између задњих и предњих тачкова возила и хоризонталне равни кретања респективно.

Иако се диференцијалне једначине основног и спрегнутог система сада могу формирати користећи поступак изложен у претходном делу овог поглавља, у наставку биће изложен детаљан поступак решења задатка оптималног управљања.

Почетни и крајњи услови (6.24), (6.25) и (6.26) одређени су респективно

$$\begin{aligned} t_0 = 0, \quad \varphi(t_0) = 0, \quad x_B(t_0) = 0, \quad y_B(t_0) = 0, \\ MV^2(t_0) + J^* \omega^2(t_0) - 2T_0 = 0, \end{aligned} \quad (6.118)$$

$$t = t_f, \quad \varphi(t_f) = \varphi_f, \quad x_B(t_f) = x_{Bf}, \quad y_B(t_f) = y_{Bf}. \quad (6.119)$$

Понтрјагинова функција сада има следећи облик [Vuković, 1984; Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962]

$$H = -1 + \lambda_\varphi \omega + \lambda_x V \cos \varphi + \lambda_y V \sin \varphi + v_1 u - v_2 \frac{MV}{J^* \omega} u, \quad (6.120)$$

где су $\lambda_\varphi(\cdot): [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda_x(\cdot): [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda_y(\cdot): [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$, $v_1(\cdot): [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ и $v_2(\cdot): [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ координате спрегнутог вектора, тако да спрегнути систем диференцијалних једначина има следећи облик

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = (\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi) V, \\ \dot{\lambda}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \dot{\lambda}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \\ \dot{v}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial V} = -(\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi) + v_2 \frac{M}{J^* \omega} u, \\ \dot{v}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial \omega} = -\lambda_\varphi - v_2 \frac{MV}{J^* \omega^2} u, \end{aligned} \quad (6.121)$$

одакле следи да су $\lambda_x = \text{const.}$ и $\lambda_y = \text{const.}$. У циљу формирања услова трансверзалности у почетном положају, у складу са Теоремом 3 [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962], познато је да вектор почетне варијације $(\Delta\varphi(0), \Delta x_B(0), \Delta y_B(0), \Delta V(0), \Delta\omega(0))$ лежи у тангентној равни хиперповрши на многострукости (6.118). Имајући у виду ортогоналност спрегнутог вектора $(\lambda_\varphi, \lambda_x, \lambda_y, v_1, v_2)$ на тангентну раван хиперповрши на многострукости (6.118), могу се формирати услови трансверзалности у почетном тренутку $t_0 = 0$

$$\lambda_\varphi(0) \Delta\varphi(0) + \lambda_x \Delta x_B(0) + \lambda_y \Delta y_B(0) + v_1(0) \Delta V(0) + v_2(0) \Delta\omega(0) = 0, \quad (6.122)$$

где $\Delta(\cdot)$ представља асинхрону варијацију [Elsgolc, 1963; Gelfand, Fomin, 1964] величине (\cdot) . Почетни услови на многострукости (6.118), доводе до следећих варијација фазних координата у почетном тренутку

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(0) &= 0, \quad \Delta x_B(0) = 0, \quad \Delta y_B(0) = 0, \\ MV(0) \Delta V(0) + J^* \omega(0) \Delta\omega(0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.123)$$

Услови трансверзалности у почетном тренутку, имајући у виду (6.122) и (6.123), могу се написати у следећем облику

$$MV(0)v_2(0) - J^*\omega(0)v_1(0) = 0. \quad (6.124)$$

Услови трансверзалности у крајњем тренутку t_f на многострукости (6.119), имају следећи облик

$$\lambda_\varphi(t_f)\Delta\varphi(t_f) + \lambda_x\Delta x_B(t_f) + \lambda_y\Delta y_B(t_f) + v_1(t_f)\Delta V(t_f) + v_2(t_f)\Delta\omega(t_f) = 0. \quad (6.125)$$

Крајњи услови на многострукости (6.119), доводе до следећих варијација фазних координата у крајњем тренутку

$$\Delta\varphi(t_f) = 0, \quad \Delta x_B(t_f) = 0, \quad \Delta y_B(t_f) = 0. \quad (6.126)$$

Имајући у виду независност варијација $\Delta V(t_f)$ и $\Delta\omega(t_f)$, као и (6.125) и (6.126), следећи гранични услови у крајњем тренутку једнаки су нули

$$v_1(t_f) = 0, \quad v_2(t_f) = 0. \quad (6.127)$$

До услови трансверзалности (6.124) и (6.127) могли смо доћи и на основу (6.48), (6.49) и (6.51). Када време t_f није унапред одређено, као што је то у овом случају, при решавању система једначина (6.112) и (6.121), у складу са граничним условима и условима трансверзалности (6.118), (6.119), (6.124) и (6.127), треба придружити услов, што следи директном применом Теореме 1 [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962], да је вредност Понтрјагинове функције на екстремалној трајекторији у сваком тренутку једнака нули

$$H(t) = 0, \quad (6.128)$$

који, узимајући у обзир граничне услове (6.127), доводи до следећег услова у крајњем тренутку t_f

$$-1 + \lambda_\varphi(t_f)\omega(t_f) + \lambda_x V(t_f)\cos\varphi(t_f) + \lambda_y V(t_f)\sin\varphi(t_f) = 0. \quad (6.129)$$

За потребе даљих разматрања, дефинише се функција прекида H_1

$$H_1 \triangleq \frac{\partial H}{\partial u} = v_1 - v_2 \frac{MV}{J^*\omega}. \quad (6.130)$$

Сада, на основу (6.120) и (6.130), Понтрјагинову функцију можемо написати у следећем облику

$$H = H_0 + H_1 u, \quad (6.131)$$

где је

$$H_0 = -1 + \lambda_\varphi \omega + \lambda_x V \cos \varphi + \lambda_y V \sin \varphi. \quad (6.132)$$

Потребан услов оптималности, који проистиче из Понтрјагиновог принципа максимума, може се записати у следећем облику

$$H_1 = 0, \quad (6.133)$$

одакле се екстремална управљања експлицитно не могу одредити. Уколико дозвољена управљања припадају отвореном скупу, као што је то у случају неограничених реакција веза, услов (6.133) представља једини услов за одређивање екстремалних управљања међу којима се налазе оптимална. У случају ограничених реакција веза, што је предмет анализе у наредном делу овог поглавља, а самим тим управљања припадају затвореном скупу, екстремална управљања се у том случају састоје из сингуларних и несингуларних управљања, уз одговарајуће услове спрезања сингуларних и несингуларних делова екстремалних трајекторија. Принцип максимума мора бити задовољен на целом интервалу $[0, t_f]$, уз одговарајуће услове трансверзалности на крајевима $t_0 = 0$ и t_f , док у тачкама спрезања фазне координате и спрегнуте променљиве морају бити непрекидне. Имајући у виду граничне услове (6.118) и (6.119), као и чињеницу да време не фигурише експлицитно у једначинама стања (6.112), постављени проблем оптималног управљања може се решити директном применом Теореме 3 [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962], која подразумева примену Теореме 1 [Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962]. Поступак одређивања екстремалних управљања састоји се у даљем диференцирању функције прекида H_1 по времену, у складу са једначинама (6.112) и (6.121), све док се експлицитно не појави управљање u . Применом формализма Поасонових заграда [Gabasov, Kirillova, 1972], при израчунавању сингуларног управљања u , пишемо

$$\dot{H}_1 = \{H_1, H_0\} = \{H_1, H_0\} + \{H_1, H_1\}u = 0. \quad (6.134)$$

На основу (6.133) и чињенице да дуж сингуларног дела екстремалне трајекторије следећа релација важи (видети [Gabasov, Kirillova, 1972])

$$\{H_1, H_1\} = 0, \quad (6.135)$$

добива се да је

$$\{H_1, H_0\} = -\lambda_x \cos \varphi - \lambda_y \sin \varphi + \lambda_\varphi \frac{MV}{J^* \omega} = 0. \quad (6.136)$$

Даљим диференцирањем по времену релације (6.134), добија се

$$\ddot{H}_1 = \{\{H_1, H_0\}, H_0\} + \{\{H_1, H_0\}, H_1\}u = 0. \quad (6.137)$$

Сада се, на основу (6.137), може одредити сингуларно управљање првог реда у облику

$$u = -\frac{\{\{H_1, H_0\}, H_0\}}{\{\{H_1, H_0\}, H_1\}}. \quad (6.138)$$

Уколико је

$$\{\{H_1, H_0\}, H_1\} = 0, \quad (6.139)$$

неопходно је наставити поступак диференцирања израза (6.137) у складу са (6.112) и (6.121). Неопходан Келијев услов оптималности за сингуларно управљање првог реда може се записати применом Поасонових заграда [Gabasov, Kirillova, 1972] у облику

$$K \equiv \{\{H_1, H_0\}, H_1\} > 0. \quad (6.140)$$

На основу функције прекида H_1 , дефинисане релацијом (6.130), као и потребног услова оптималности (6.133), добија се

$$v_1 = v_2 \frac{MV}{J^* \omega}. \quad (6.141)$$

Обједињујући услове (6.128), (6.131), (6.132), (6.133) и (6.136), а у складу са (6.109) и (6.141), добијају се следеће зависности које важе дуж сингуларног дела екстремалне трајекторије

$$\begin{aligned}
V &= \frac{2T_0}{M} (\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi), \\
\omega &= \frac{2T_0}{J^*} \lambda_\varphi,
\end{aligned}
\tag{6.142}$$

одакле се, на основу почетног стања (6.118) система, може одредити брзина тачке B возила у почетном тренутку

$$V_0 = \frac{2T_0}{M} \lambda_x. \tag{6.143}$$

Коначно, на основу (6.130), (6.132), (6.138), (6.141) и (6.142), сингуларно управљање првог реда има следећи облик

$$u = \frac{4T_0^2}{J^* M} (\lambda_y \cos \varphi - \lambda_x \sin \varphi) \lambda_\varphi. \tag{6.144}$$

Неопходан Келијев услов оптималности (6.140) за сингуларно управљање првог реда [Bryson, Ho, 1975; Kelley, Kopp, Moyer, 1967], на основу (6.130), (6.132), (6.141) и (6.142), добија следећи облик

$$K = \frac{M}{J^* \omega^2} > 0. \tag{6.145}$$

Из (6.145) може се закључити да је Келијев услов оптималности задовољен, односно $K > 0 \forall t \in [0, t_f]$. Диференцијалне једначине основног (6.112), као и спрегнутог (6.121) система, које одговарају сингуларном делу управљања, сада добијају следећи облик

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \frac{2T_0}{J^*} \lambda_\varphi, \\
\dot{x}_B &= \frac{2T_0}{M} (\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi) \cos \varphi, \\
\dot{y}_B &= \frac{2T_0}{M} (\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi) \sin \varphi, \\
\dot{V} &= \frac{4T_0^2}{J^* M} (\lambda_y \cos \varphi - \lambda_x \sin \varphi) \lambda_\varphi, \\
\dot{\omega} &= \frac{4T_0^2}{MJ^*} (\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi) (\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi),
\end{aligned}
\tag{6.146}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{2T_0}{M} (\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi) (\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi), \\
\dot{\lambda}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\
\dot{\lambda}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \\
\dot{v}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial V} = -(\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi) + \frac{2T_0}{J^*} (-\lambda_x \sin \varphi + \lambda_y \cos \varphi) v_2, \\
\dot{v}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial \omega} = -\lambda_\varphi + \frac{2T_0}{M} v_1 (\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi).
\end{aligned} \tag{6.147}$$

На основу услова (6.128), имајући у виду (6.120), (6.136), (6.141), (6.142) и (6.144), добија се први интеграл у следећем облику

$$-1 + \frac{2T_0}{J^*} \lambda_\varphi^2 + \frac{2T_0}{M} (\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi)^2 = 0. \tag{6.148}$$

Из квадратне форме (6.148) одређене у почетном тренутку, може се изразити координата $\lambda_\varphi(t_0)$ спрегнутог вектора у следећем облику

$$\lambda_\varphi(t_0) = \pm \sqrt{\frac{J^*}{2T_0} \left(1 - \frac{2T_0}{M} \lambda_x^2 \right)}, \tag{6.149}$$

одакле се може одредити глобална процена интервала вредности координате λ_x

$$-\sqrt{\frac{M}{2T_0}} \leq \lambda_x \leq \sqrt{\frac{M}{2T_0}}, \tag{6.150}$$

док се процена интервала вредности координате λ_y може дати у следећем облику

$$-\sqrt{\frac{M}{2T_0}} \cot \frac{\varphi}{2} \leq \lambda_y \leq \sqrt{\frac{M}{2T_0}} \cot \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi \neq n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{6.151}$$

где се за φ , по могућности, може узети минимална вредност φ^* скупа бројева одређених максималним вредностима угла за свако од решења ТРВР. Како унапред нису познати закони промене угла φ за свако од решења ТРВР, за φ^* најпре се може узети она вредност угла која одговара крајњем положају возила

$$-\sqrt{\frac{M}{2T_0}} \cot \frac{\varphi_f}{2} \leq \lambda_y \leq \sqrt{\frac{M}{2T_0}} \cot \frac{\varphi_f}{2}. \quad (6.152)$$

Овде је такође важно напоменути да при вредности крајњег угла возила $\varphi_f = 0$, као и при вредности $\varphi_f = \pi$, процена интервала вредности координате λ_y , не може се одредити, те ће ови случајеви у наредном делу бити посебно разматрани. Следеће функционалне релације у нумеричком облику сада могу бити успостављене, имајући у виду да је крајњи положај возила одређен

$$\begin{aligned} \varphi(t_f) - \varphi_f &= \Gamma_\varphi(\lambda_x, \lambda_y, t_f), \\ x_B(t_f) - x_{Bf} &= \Gamma_x(\lambda_x, \lambda_y, t_f), \\ y_B(t_f) - y_{Bf} &= \Gamma_y(\lambda_x, \lambda_y, t_f). \end{aligned} \quad (6.153)$$

Тропараметарски шутинг састоји се у одређивању непознатих координата λ_x и λ_y спрегнутог вектора, као и минимално потребног времена t_f . Решења TPBVP могу бити геометријски представљена у простору \mathbb{R}^3 са осамом λ_x, λ_y и t_f посредством уграђене **ContourPlot3D()** *Mathematica* функције.

Решења TPBVP одредићемо за следеће вредности параметара

$$\begin{aligned} T_0 &= 1000 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}, \quad \varphi(t_f) = \varphi_f, \quad x_B(t_f) = 5\text{m}, \quad y_B(t_f) = 5\text{m}, \\ M_1 &= 1000\text{kg}, \quad M_2 = 110\text{kg}, \quad J_1 = 1500\text{kgm}^2, \quad J_2 = 30\text{kgm}^2, \\ l_1 &= 0,75\text{m}, \quad l_2 = 1,65\text{m}. \end{aligned} \quad (6.154)$$

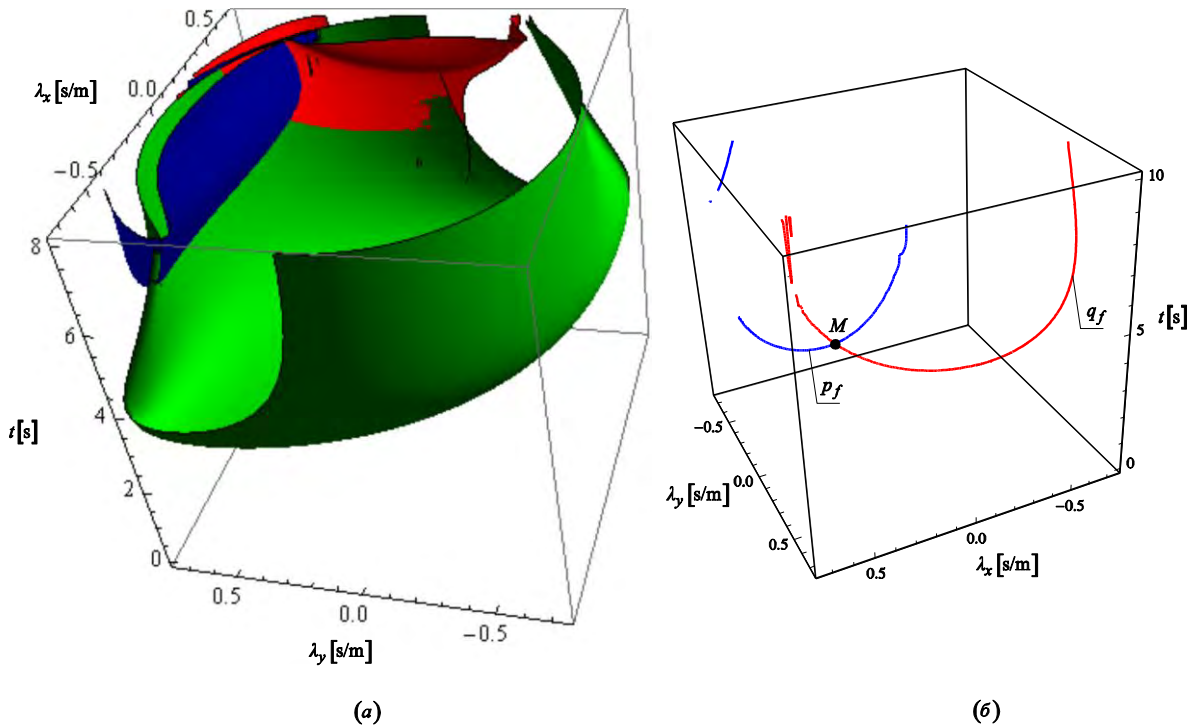
У случајевима који следе у наставку, биће разматран утицај промене вредности крајњег угла φ_f на појаву вишеструких решења TPBVP.

6.4.1 Случај $\varphi_f = \pi / 2$

На основу (6.150), (6.152) и (6.154), могу се одредити процене интервала вредности координата λ_x и λ_y

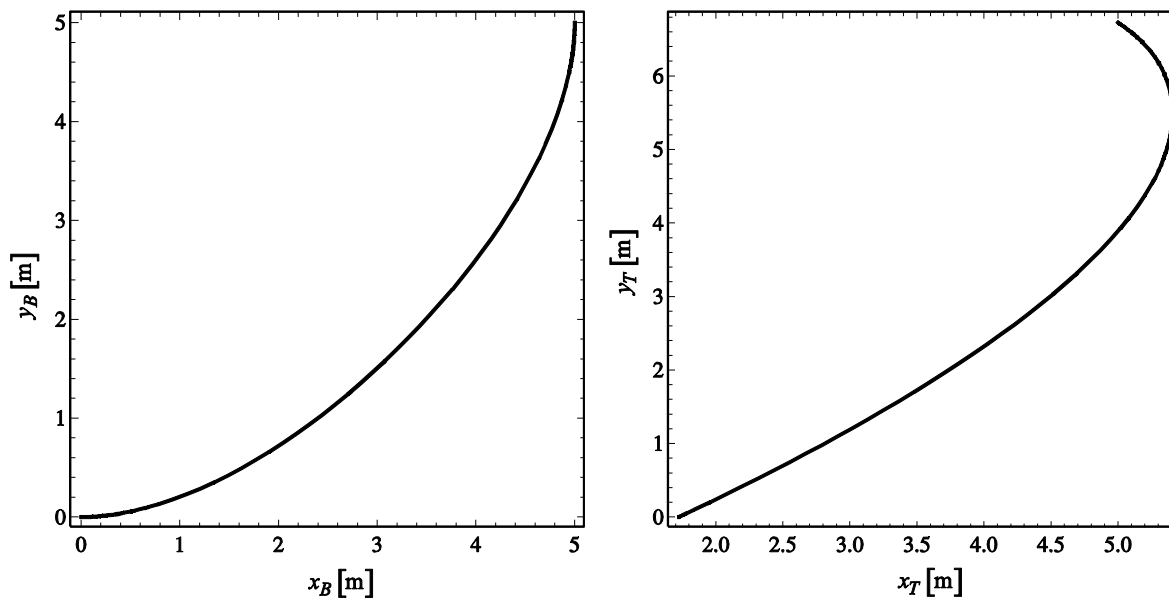
$$\begin{aligned} -0,7416 \leq \lambda_x \leq 0,7416, \\ -0,7416 \leq \lambda_y \leq 0,7416. \end{aligned} \quad (6.155)$$

Имајући у виду да се одговарајуће површи, односно просторне линије, секу само у једној тачки (видети слику 6.22), сада се са сигурношћу може тврдити да постоји јединствено решење TPBVP за случај $\varphi_f = \pi/2$, као и да је оно оптимално. На слици 6.22(a) приказан је пресек површи (6.153) за $\varphi_f = \pi/2$ у интервалу $0 \leq t \leq 8$ s, док је на слици 6.22(b) приказан пресек просторних линија p_f и q_f , где се јасно може уочити тачка пресека M чије координате у \mathbb{R}^3 простору $(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$ одговарају решењу TPBVP. Визуелне процене координата пресечне тачке M са слике 6.22(a) су $(0.5, 0.5, 6)$, које представљају почетну итерацију за налажење тачних вредности применом шутинг методе.

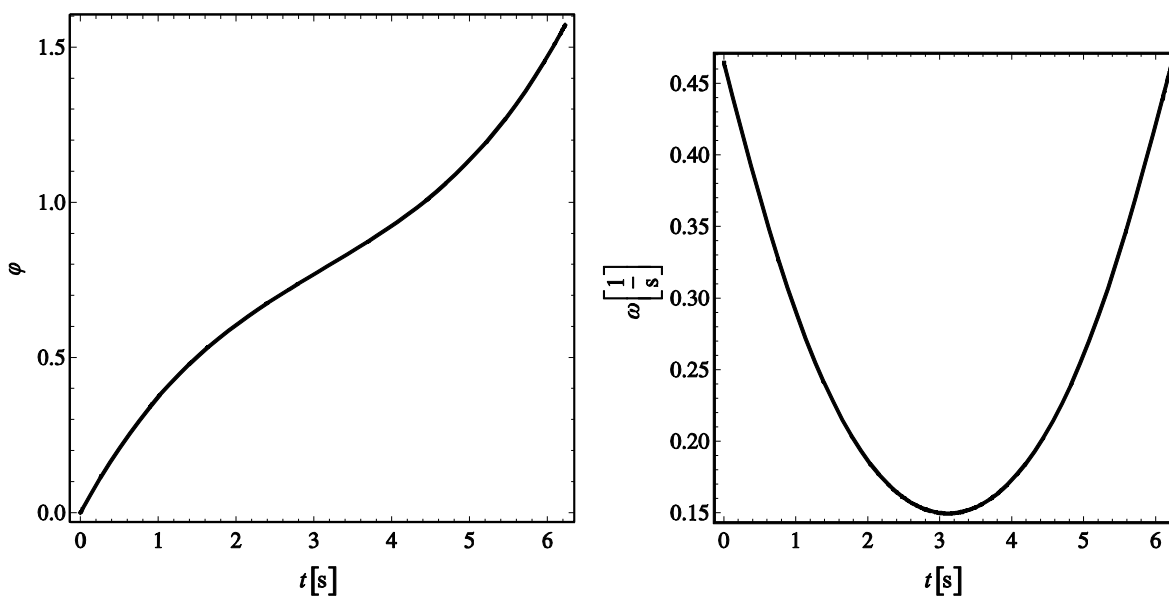


Слика 6.22 (a) Површи $\Gamma_\varphi(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$, $\Gamma_x(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$ и $\Gamma_y(\lambda_x, \lambda_y, t_f)$ за $\varphi_f = \pi/2$; (b) Просторне линије $p_f = f_p(\lambda_x, t_f)$ и $q_f = f_q(\lambda_x, t_f)$ за $\varphi_f = \pi/2$

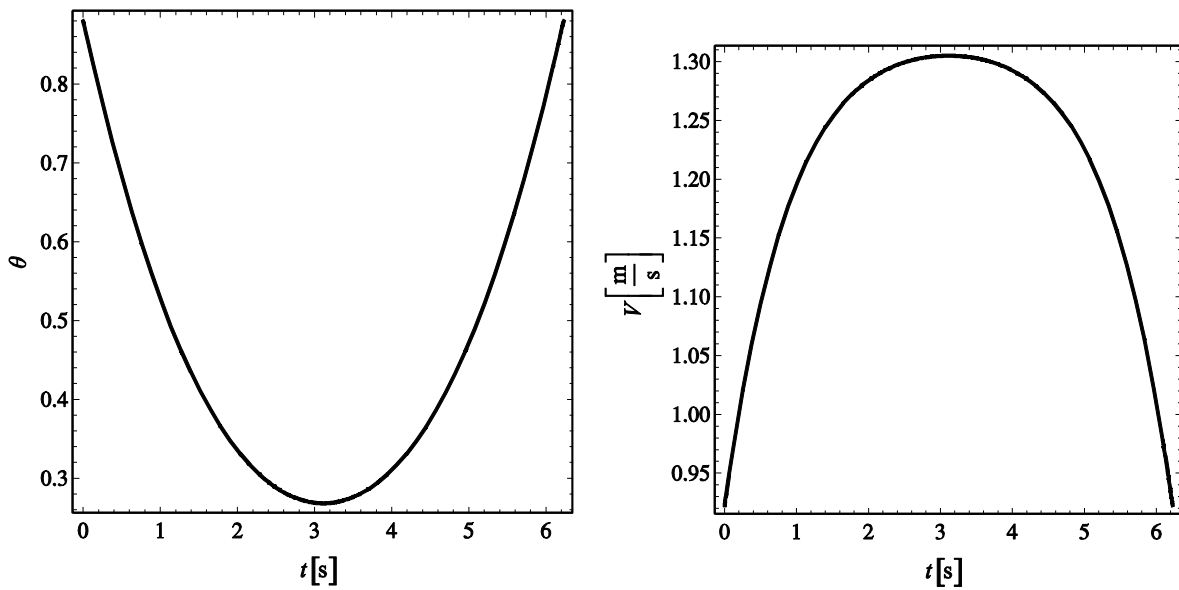
За $\varphi_f = \pi/2$ добијају се следеће граничне вредности: $t_f = 6,225713 \text{ s}$, $\lambda_x = 0,512194 \text{ s/m}$ и $\lambda_y = 0,512194 \text{ s/m}$.



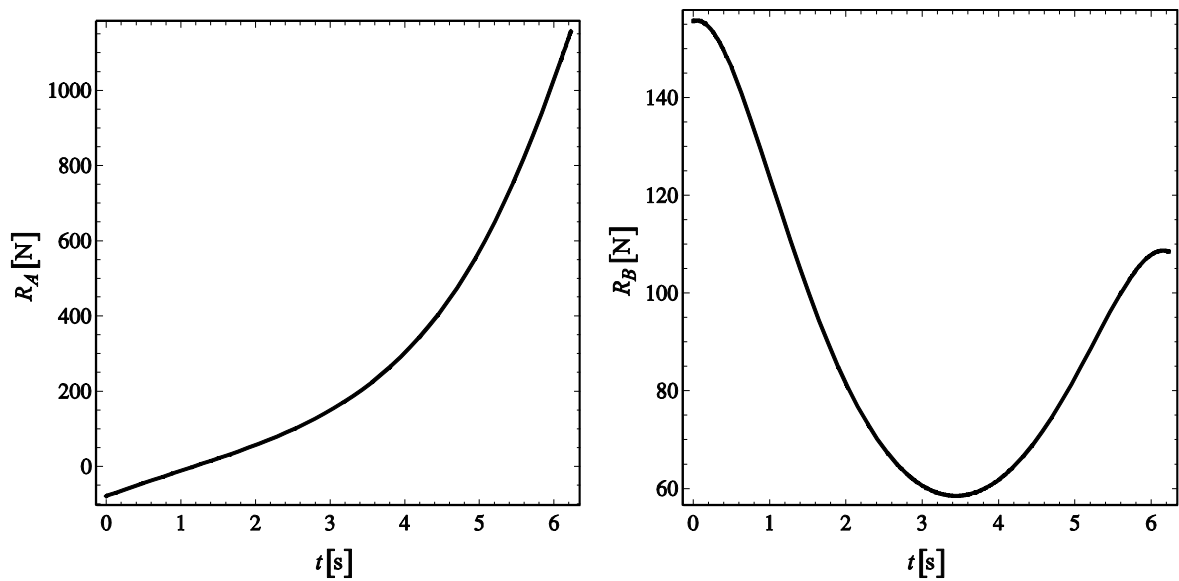
Слика 6.23 Трајекторија тачке B и трајекторија центра маса T возила за $\varphi_f = \pi/2$



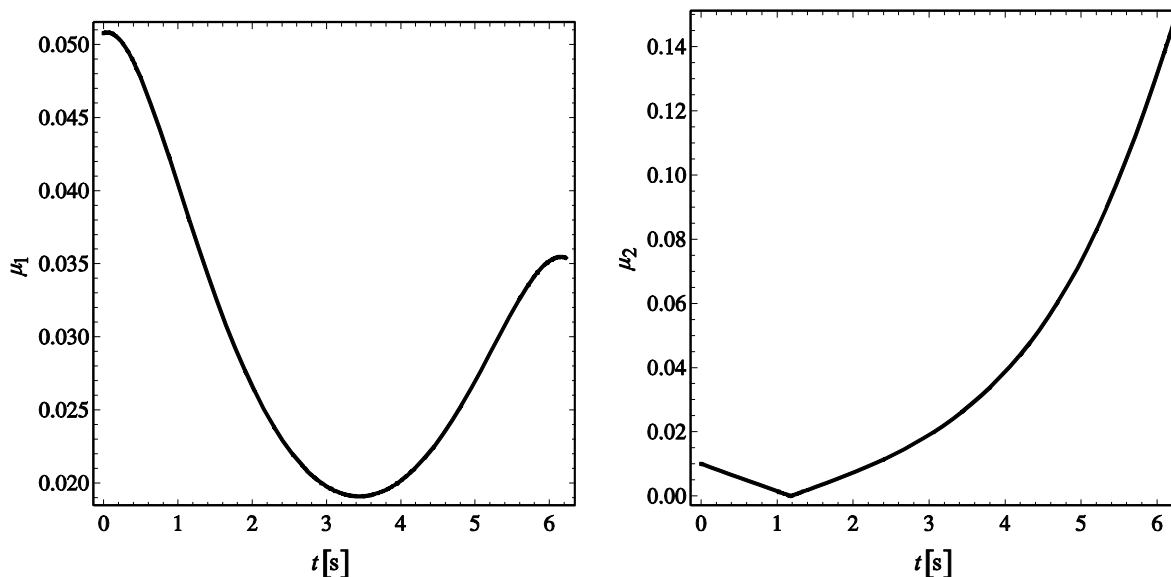
Слика 6.24 Угао φ и угаона брзина ω возила за $\varphi_f = \pi/2$



Слика 6.25 Угао ζ и брзина V тачке B возила за $\varphi_f = \pi/2$



Слика 6.26 Реакције R_A и R_B нехолономних веза за $\varphi_f = \pi/2$



Слика 6.27 Минимално потребне вредности коефицијената μ_1 и μ_2 трења клизања за $\varphi_f = \pi/2$

Неопходни динамички услови (6.116) и (6.117) биће истовремено задовољени (видети слику 6.27) при минималној вредности коефицијента трења клизања $\mu_2(t_f) = |R_A(t_f)| / N_2 = 0,14789$, где су нормалне реакције N_1 и N_2 одређене респективно као

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{M_1 l_1 g}{l} = 3065,5 \text{ N}, \\ N_2 &= \frac{M_1 l_2 g}{l} + M_2 g = 7823,5 \text{ N}. \end{aligned} \tag{6.156}$$

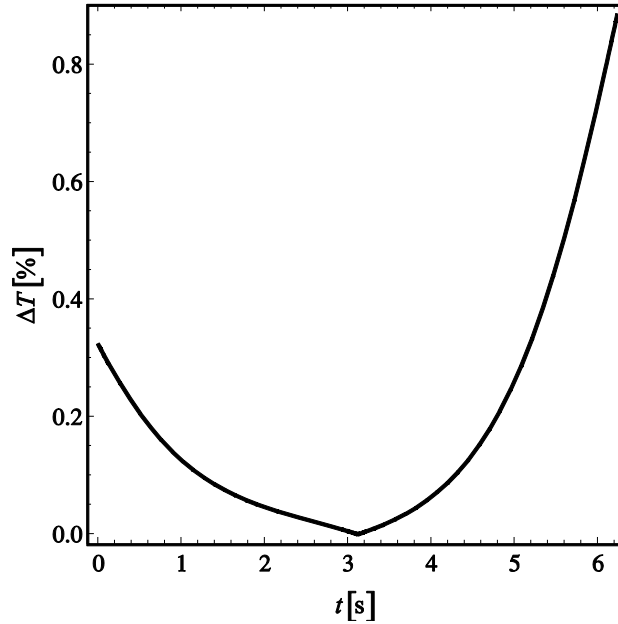
Овим је показано да се реализација брахистохроног кретања возила, у складу са (6.98), може остварити уколико коефицијент трења клизања између тачкова возила и хоризонталне равни кретања задовољава неједнакост

$$\mu > 0,14789. \tag{6.157}$$

Сада, на основу добијених нумеричких решења, можемо показати оправданост поступка у коме смо занемарили део кинетичке енергије возила. Наиме, одредимо

однос занемареног дела кинетичке енергије $\tilde{T} = \frac{1}{2}(2J_2\omega\dot{\theta} + J_2\dot{\theta}^2)$ у односу на коришћену кинетичку енергију $T = \frac{1}{2}(MV^2 + J^*\omega^2)$ возила изражен у процентима

$$\Delta T = \left| \frac{\tilde{T}}{T} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{2J_2\omega\dot{\theta} + J_2\dot{\theta}^2}{MV^2 + J^*\omega^2} \right| \cdot 100\%. \quad (6.158)$$



Слика 6.28 Однос ΔT за $\varphi_f = \pi/2$

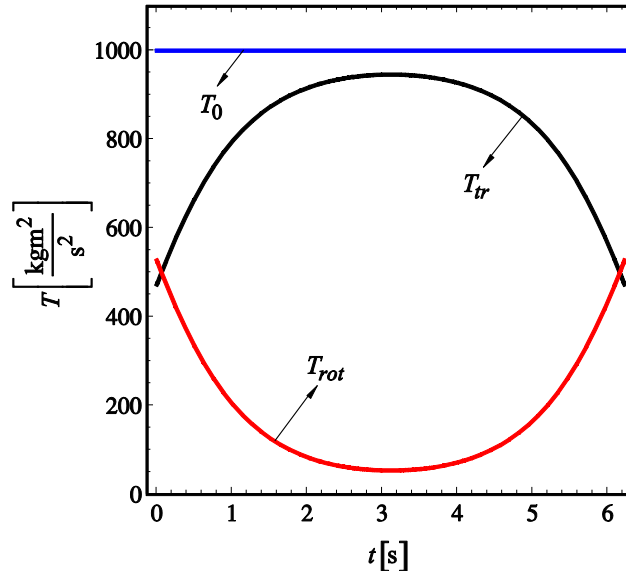
Са слике 6.28 евидентно је да је максимална вредност величине ΔT мања од 1%, чиме је поступак у коме смо занемарили део кинетичке енергије возила у потпуности оправдан. Такође, кинетичку енергију возила могуће је представити и као

$$T = T_{tr} + T_{rot}, \quad (6.159)$$

где је $T_{tr} = \frac{1}{2}MV^2$ кинетичка енергија при транслаторном кретању тела возила са

полом транслације у тачки B , док је $T_{rot} = \frac{1}{2}J^*\omega^2$ кинетичка енергија при обртном кретању тела возила око вертикалне осе $B\delta$, чији су закони промене приказани на

слици 6.29 (постоји размена између кинетичких енергија T_{tr} и T_{rot} тако да је $T(t) = \text{const.} = T_0$).



Слика 6.29 Кинетичке енергије T_{tr} и T_{rot} за $\varphi_f = \pi/2$

6.4.2 Случај $\varphi_f = \pi/30$

Имајући у виду да нисмо у могућности да одредимо процену вредности координате λ_y при вредности крајњег угла сечива $\varphi_f = 0$, најпре ћемо одредити процену, као и решења одговарајућег ТРВР при блиској вредности крајњег угла возила $\varphi_f = \pi/30$. У овом случају, на основу (6.150) и (6.152), могу се одредити процене интервала вредности координата λ_x и λ_y у следећем облику

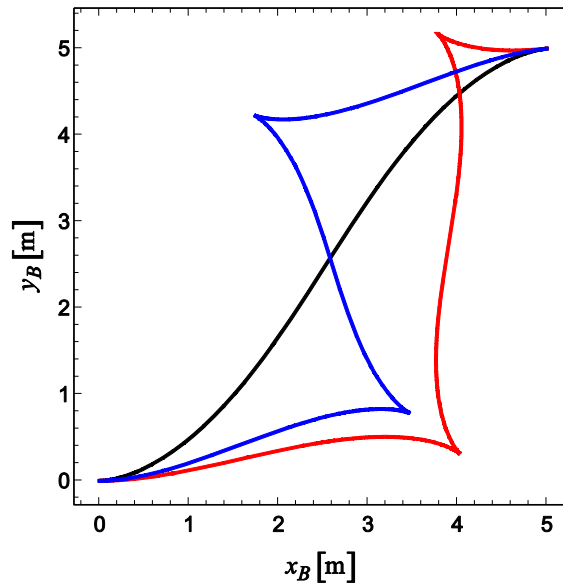
$$\begin{aligned} -0,7416 &\leq \lambda_x \leq 0,7416, \\ -7,0560 &\leq \lambda_y \leq 7,0560. \end{aligned} \tag{6.160}$$

Сва решења ТРВР у интервалу $0 \leq t \leq 12\text{s}$ приказана су у табели 6.4.

Табела 6.4 Решења ТРВVP за $\varphi_f = \pi/30$

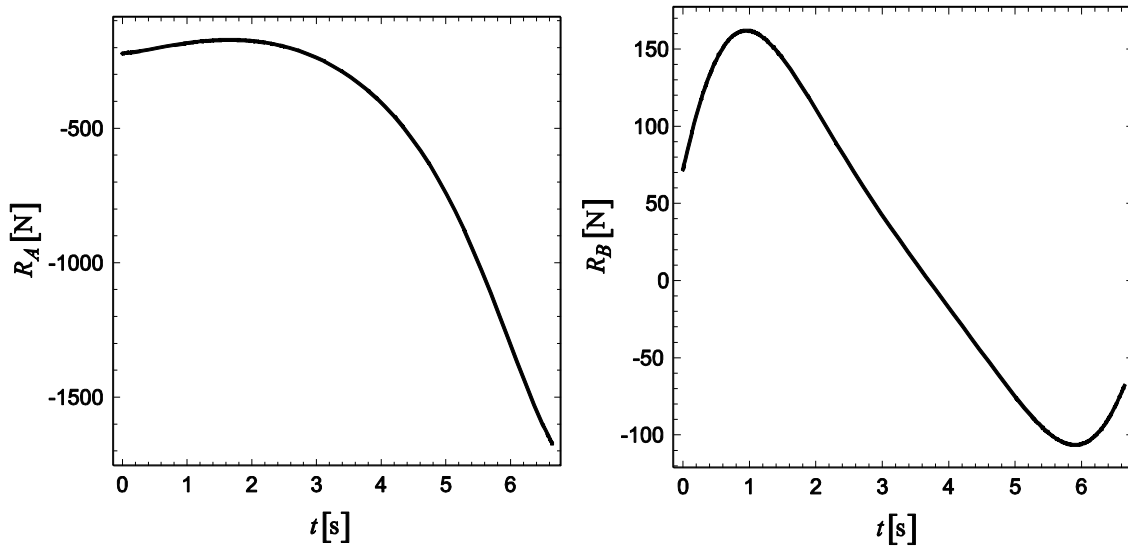
Решења	λ_x [s/m]	λ_y [s/m]	t_f [s]
Прво решење	0,171452	0,769994	6,640742
Друго решење	0,610765	0,658625	11,001027
Треће решење	0,447916	0,912682	11,212298

На основу приказаних решења ТРВVP за $\varphi_f = \pi/30$ у табели 6.4, можемо закључити да глобални минимум времена одговара првом решењу и износи $t_f = 6,640742$ s .

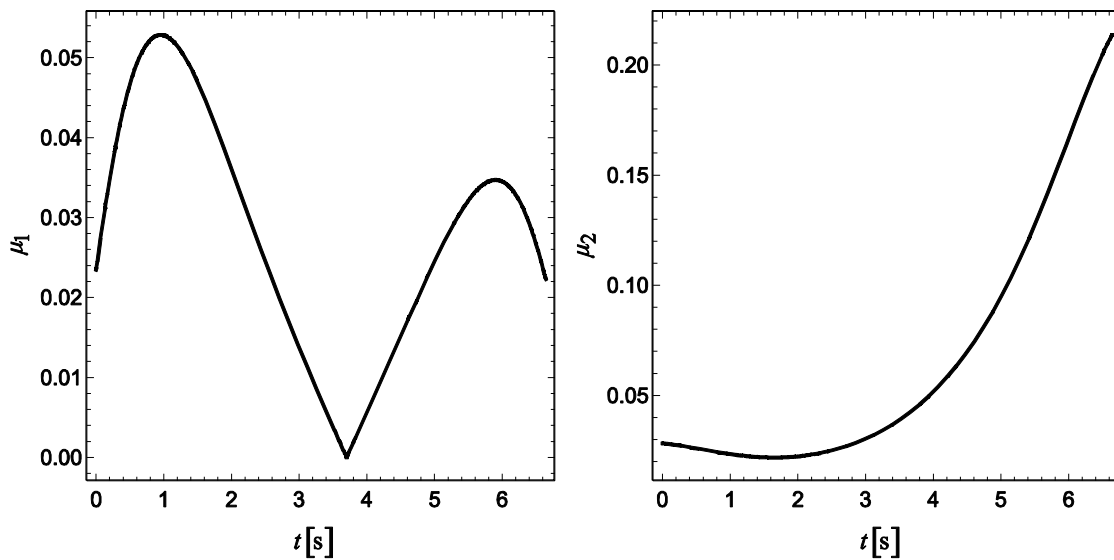


Слика 6.30 Трајекторије тачке B возила за $\varphi_f = \pi/30$

На слици 6.31 приказане су реакције R_A и R_B нехолономних веза које одговарају првом решењу, док су на слици 6.32 приказани закони промене минимално потребних вредности коефицијената μ_1 и μ_2 трења клизања.



Слика 6.31 Реакције R_A и R_B нехолономних веза које одговарају првом решењу за $\varphi_f = \pi/30$



Слика 6.32 Минимално потребне вредности коефицијената μ_1 и μ_2 трења клизања које одговарају првом решењу за $\varphi_f = \pi/30$

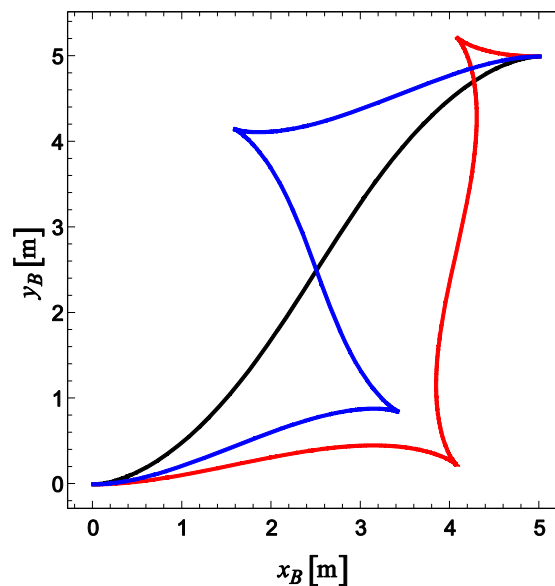
Минимално потребна вредност коефицијента трења клизања, која одговара првом решењу за $\varphi_f = \pi/30$, одређена је као $\mu_2(t_f) = |R_A(t_f)|/N_2 = 0,21368$.

6.4.3 Случај $\varphi_f = 0$

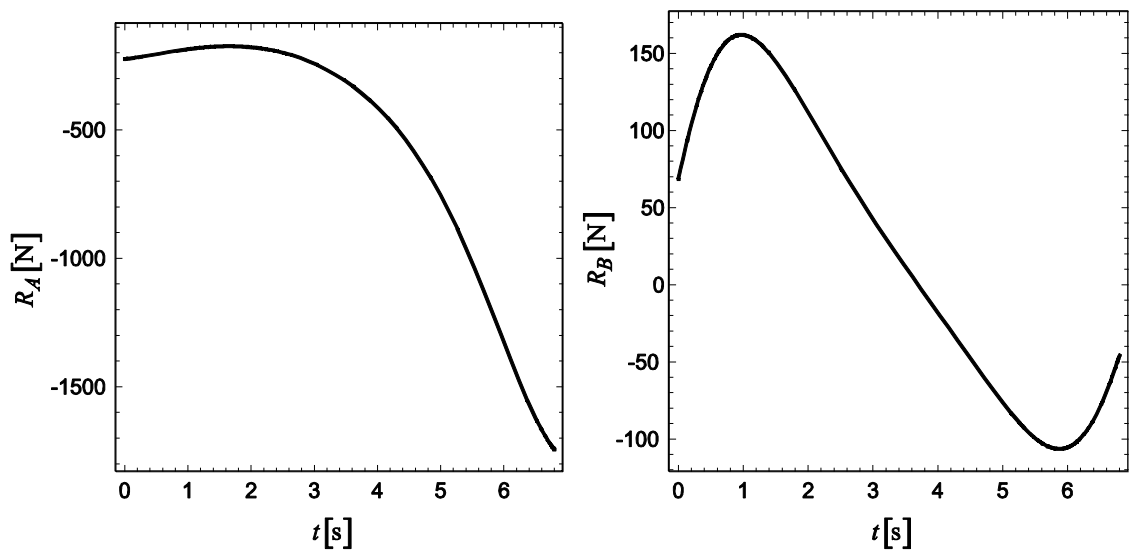
Како се за вредност крајњег угла возила $\varphi_f = 0$ процена интервала вредности координате λ_y не може дати на основу (6.152), у овом случају, имајући у виду да су положаји возила одређени крајњим угловима $\varphi_f = 0$ и $\varphi_f = \pi/30$ међусобно блиски, можемо претпоставити да се и решења TPBVP неће умногоме разликовати. У овом случају, користиће се процене дате у (6.160). Сва решења TPBVP у интервалу $0 \leq t \leq 12s$ приказана су у табели 6.5.

Табела 6.5 Решења TPBVP за $\varphi_f = 0$

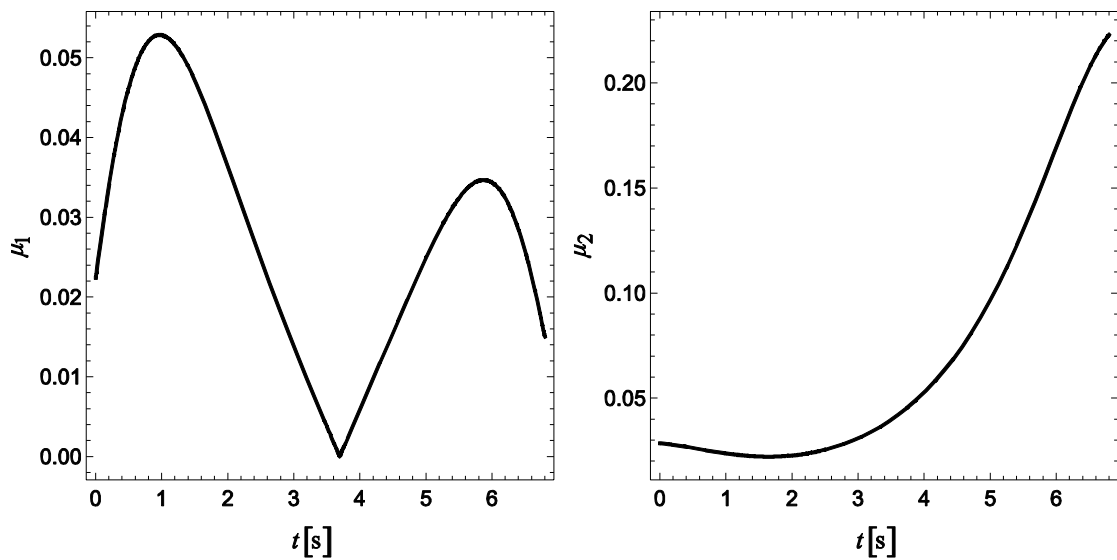
Решења	λ_x [s/m]	λ_y [s/m]	t_f [s]
Прво решење	0,163099	0,773142	6,797870
Друго решење	0,627717	0,627717	10,922214
Треће решење	0,422434	0,937414	11,336731



Слика 6.33 Трајекторије тачке B возила за $\varphi_f = 0$



Слика 6.34 Реакције R_A и R_B нехолономних веза које одговарају првом решењу за $\varphi_f = 0$

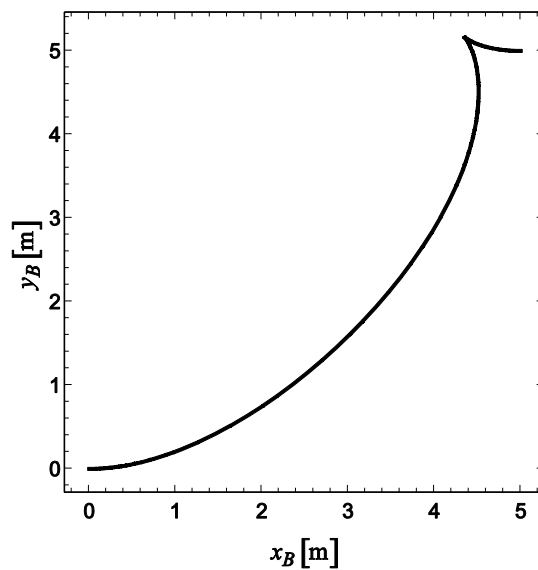


Слика 6.35 Минимално потребне вредности коефицијената μ_1 и μ_2 трења клизања које одговарају првом решењу за $\varphi_f = 0$

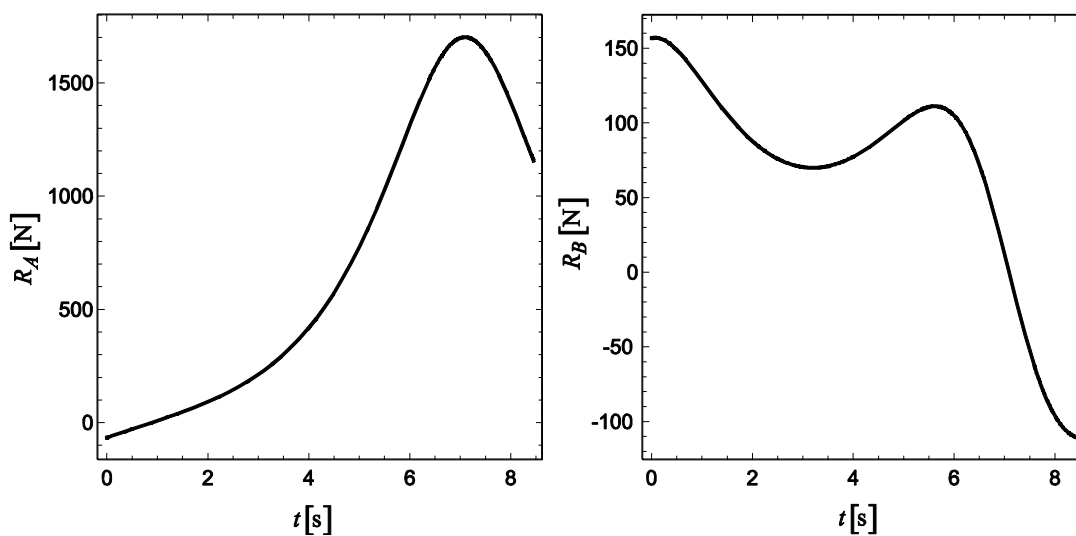
Минимално потребна вредност коефицијента трења клизања, која одговара првом решењу за $\varphi_f = 0$, одређена је као $\mu_2(t_f) = |R_A(t_f)| / N_2 = 0,22289$.

6.4.4 Случај $\varphi_f = \pi$

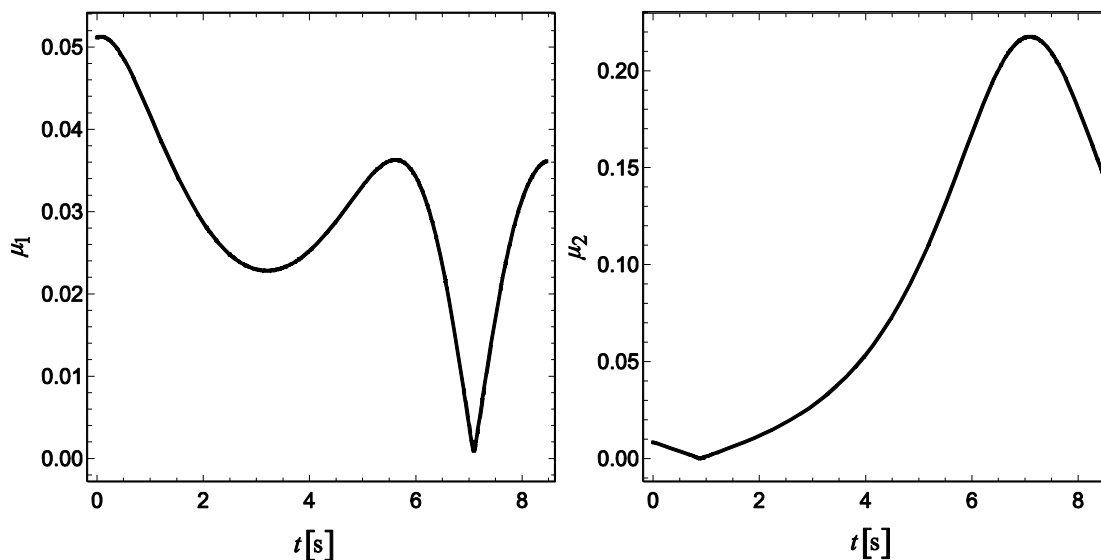
Као што је речено, при вредности крајњег угла возила $\varphi_f = \pi$, процена интервала вредности координате λ_y , не може се одредити. У овом случају, користиће се процене интервала вредности координата λ_x и λ_y дате у (6.155). Решење TPBVP за случај $\varphi_f = \pi$ у интервалу $0 \leq t \leq 12\text{s}$ је јединствено; непознате граничне вредности су: $t_f = 8,453732\text{ s}$, $\lambda_x = 0,506210\text{ s/m}$ и $\lambda_y = 0,506210\text{ s/m}$.



Слика 6.36 Трајекторија тачке B возила за $\varphi_f = \pi$



Слика 6.37 Реакције R_A и R_B нехолономних веза за $\varphi_f = \pi$



Слика 6.38 Минимално потребне вредности коефицијената μ_1 и μ_2 трења клизања за $\varphi_f = \pi$

Минимално потребна вредност коефицијента трења клизања за $\varphi_f = \pi$ је

$$\mu_2(t_f) = |R_A(t_f)| / N_2 = 0,21760.$$

6.5 Решење проблема оптималног управљања за случај ограничених реакција нехолономних веза

У овом делу разматра се брахистохрони кретање возила за случај ограниченог статичког коефицијента трења клизања између тачкова возила и хоризонталне равни кретања, имајући у виду (6.114), (6.115), (6.116) и (6.117), који задовољава следећу двојну неједнакост

$$\mu_{1\max} < \mu < \mu^*, \quad (6.161)$$

где је $\mu_{1\max}$ ⁴⁴ максимална вредност функције $\mu_1(t)$, која изражава закон промене минимално потребне вредности коефицијента трења клизања између тачкова задње осовине возила и хоризонталне равни кретања на интервалу $[0, t_f]$. Минимално

⁴⁴ Ми унапред не знамо закон промене функције $\mu_1(t)$, па самим тим и $\mu_{1\max}$, али након одређених решења одговарајућег TPBVP, неопходно је проверити да ли је двојна неједнакост (6.161) задовољена.

потребне вредности коефицијента μ^* трења клизања, при различитим вредностима крајњег угла φ_f , су

$$\begin{aligned}\mu^* (\varphi_f = \pi / 2) &= 0,14789, \\ \mu^* (\varphi_f = \pi / 30) &= 0,21368, \\ \mu^* (\varphi_f = 0) &= 0,22289, \\ \mu^* (\varphi_f = \pi) &= 0,21760.\end{aligned}\tag{6.162}$$

На несингуларном делу екстремалне трајекторије ($H_1 \neq 0$), на основу принципа максимума, имајући у виду (6.114), (6.116) и (6.161), управљање се бира између две граничне вредности

$$\begin{aligned}u^* &= \frac{\omega}{M} \left[(Ml_2 + M_2l_1)\omega - N_2 \frac{l}{\sqrt{V^2 + l^2\omega^2}} \mu \right], \\ u^* &= \frac{\omega}{M} \left[(Ml_2 + M_2l_1)\omega + N_2 \frac{l}{\sqrt{V^2 + l^2\omega^2}} \mu \right],\end{aligned}\tag{6.163}$$

тако да производ $H_1 u^*$ узима максималну вредност. На основу графичких приказа функција $\mu_2(t)$ при различитим вредностима крајњег угла φ_f , датих на сликама 6.27, 6.32, 6.35 и 6.38, не умањујући општост разматрања, структура управљања има следећи облик

$$u = \begin{cases} u_{\text{sing}}, & 0 \leq t < t_1 \\ u^*, & t_1 \leq t \leq t_f \end{cases},\tag{6.164}$$

где је сингуларно управљање u_{sing} одређено изразом (6.144), док је t_1 тренутак прекида функције управљања $u(t)$. Како је $q = 1$ и $r = 0$, односно $q + r = 1$, на основу Теореме 1 [McDanell, Powers, 1971; Odiа, Bell, 2012] можемо закључити да је неопходан услов за оптимално спрезање испуњен. На интервалу $[0, t_1)$, који одговара сингуларном делу управљања u_{sing} , важе једначине основног (6.146) и спрегнутог

(6.147) система одређене у претходном делу овог поглавља. На интервалу $[t_1, t_f]$, који одговара несингуларном делу управљања, важе једначине стања које сада имају следећи облик

$$\begin{aligned}
 \dot{\varphi} &= \omega, \\
 \dot{x}_B &= V \cos \varphi, \\
 \dot{y}_B &= V \sin \varphi, \\
 \dot{V} &= u^*, \\
 \dot{\omega} &= -\frac{MV}{J^* \omega} u^*,
 \end{aligned} \tag{6.165}$$

док спрегнути систем диференцијалних једначина има следећи облик

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} + v \frac{\partial \mu_2}{\partial \varphi} = (\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi) V, \\
 \dot{\lambda}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial \mu_2}{\partial x} = 0, \\
 \dot{\lambda}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} + v \frac{\partial \mu_2}{\partial y} = 0, \\
 \dot{v}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial V} + v \frac{\partial \mu_2}{\partial V} = -(\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi) + v_2 \frac{M}{J^* \omega} u^* + v \frac{\partial \mu_2}{\partial V}, \\
 \dot{v}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial \omega} + v \frac{\partial \mu_2}{\partial \omega} = -\lambda_\varphi - v_2 \frac{MV}{J^* \omega^2} u^* + v \frac{\partial \mu_2}{\partial \omega},
 \end{aligned} \tag{6.166}$$

где је

$$\mu_2 = \frac{\sqrt{V^2 + l^2 \omega^2}}{l \omega N_2} \left[-Mu + (Ml_2 + M_2 l_1) \omega^2 \right]. \tag{6.167}$$

На сингуларном делу екстремалне трајекторије множитељ $v \equiv 0$ [Leitmann, 1966], док се вредност множитеља v на несингуларном делу екстремалне трајекторије одређује из услова [Leitmann, 1966]

$$\frac{\partial H}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial u} (\mu - \mu_2) = 0, \tag{6.168}$$

односно

$$v = \frac{\frac{\partial H}{\partial u}}{\frac{\partial \mu_2}{\partial u}} = - \frac{v_1 - v_2 \frac{MV}{J^* \omega}}{\frac{M}{N_2} \frac{\sqrt{V^2 + l^2 \omega^2}}{l \omega}}. \quad (6.169)$$

Петопараметарски шутинг састоји се у одређивању непознатих координата λ_x и λ_y , спрегнутог вектора, брзине $V(t_f)$ тачке B возила у крајњем тренутку t_f , тренутака t_1 прекида функције управљања, као и крајњег тренутка t_f . Нумерички поступак применом кога ћемо решити Кошијев проблем, можемо представити у неколико следећих корака:

– У првом кораку, на интервалу $[t_f, t_1]$ који одговара несингуларном делу управљања u^* , погодно је извршити нумеричку интеграцију диференцијалних једначина (6.165) и (6.166) уназад са почетним условима

$$\begin{aligned} \varphi(t_f) &= \varphi_f, & x_B(t_f) &= x_{Bf}, & y_B(t_f) &= y_{Bf}, \\ V(t_f) &= V_f, & \omega(t_f) &= \pm \sqrt{(2T_0 - MV_f^2) / J^*}, \\ \lambda_\varphi(t_f) &= [1 - V_f(\lambda_x \cos \varphi_f + \lambda_y \sin \varphi_f)] / \omega(t_f), \\ v_1(t_f) &= 0, & v_2(t_f) &= 0. \end{aligned} \quad (6.170)$$

Коришћењем функције прекида (6.130), као и извода по времену функције прекида (6.136), могу се формирати следеће функционалне зависности у нумеричком облику

$$\begin{aligned} H_1(t_1) &= \Gamma_1(t_f, t_1, \lambda_x, \lambda_y, V_f), \\ \{H_1, H_0\}(t_1) &= \Gamma_2(t_f, t_1, \lambda_x, \lambda_y, V_f), \end{aligned} \quad (6.171)$$

одређене у тренутку t_1 .

– У другом кораку, погодно је такође извршити нумеричку интеграцију основног (6.146) и спрегнутог (6.147) система уназад на интервалу $(t_1, 0]$, који одговара сингуларном делу управљања u_{sing} , са почетним условима $\varphi(t_1), x_B(t_1), y_B(t_1), V(t_1), \omega(t_1), \lambda_\varphi(t_1), v_1(t_1)$ и $v_2(t_1)$, који се добијају као решења нумеричке

интеграције извршене у претходном кораку. На основу одређеног почетног положаја возила, могу се формирати следеће функционалне зависности у нумеричком облику

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \Gamma_3(t_f, t_1, \lambda_x, \lambda_y, V_f), \\ x_B(0) &= \Gamma_4(t_f, t_1, \lambda_x, \lambda_y, V_f), \\ y_B(0) &= \Gamma_5(t_f, t_1, \lambda_x, \lambda_y, V_f),\end{aligned}\tag{6.172}$$

одређене у тренутку $t_0 = 0$.

На основу претходно реченог, може се сада формирати шутинг функција

$$\mathbf{\Gamma}(z) = [\Gamma_1(z), \Gamma_2(z), \Gamma_3(z), \Gamma_4(z), \Gamma_5(z)]^T = \mathbf{0}_{5 \times 1},\tag{6.173}$$

где су $\mathbf{\Gamma}(z) \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$ и $z = [t_f, t_1, \lambda_x, \lambda_y, V_f]$. Процена интервала вредности брзине V_f тачке B у крајњем тренутку може се одредити на основу квадратне форме (6.109)

$$-\sqrt{\frac{2T_0}{M}} \leq V_f \leq \sqrt{\frac{2T_0}{M}},\tag{6.174}$$

док су $t_f \geq 0$ и $t_1 \geq 0$. Процена интервала вредности координате λ_x дата је у (6.150), док се процена интервала вредности координате λ_y спрегнутог вектора може одредити на основу

$$-\sqrt{\frac{M}{2T_0}} \cot \frac{\varphi}{2} \leq \lambda_y \leq \sqrt{\frac{M}{2T_0}} \cot \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi \neq n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots,\tag{6.175}$$

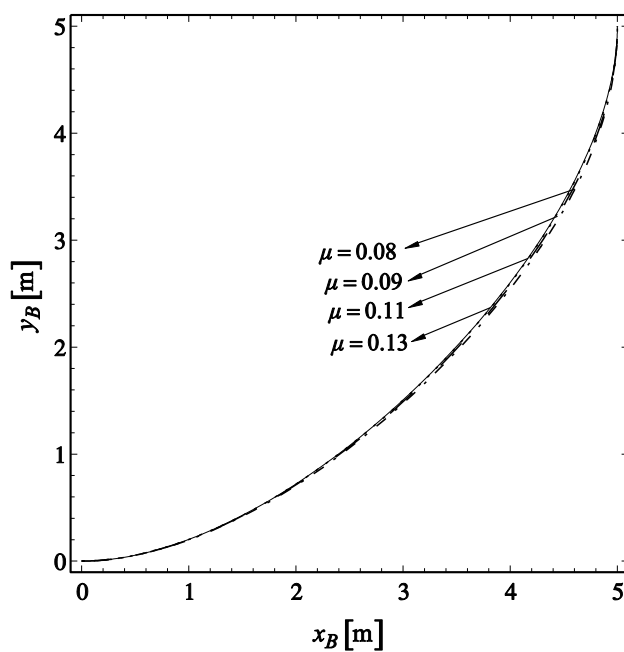
где се за φ , по могућности, може узети минимална вредност φ^* скупа бројева одређених максималним вредностима угла за свако од решења TPBVP, на интервалу $[0, t_1)$ који одговара сингуларном делу управљања. Како унапред нису познати закони промене угла φ за свако од решења TPBVP за случај ограничених реакција нехолономних веза, могу се у првој итерацији користити процене одређене у претходном делу овог поглавља.

6.5.1 Случај $\varphi_f = \pi / 2$

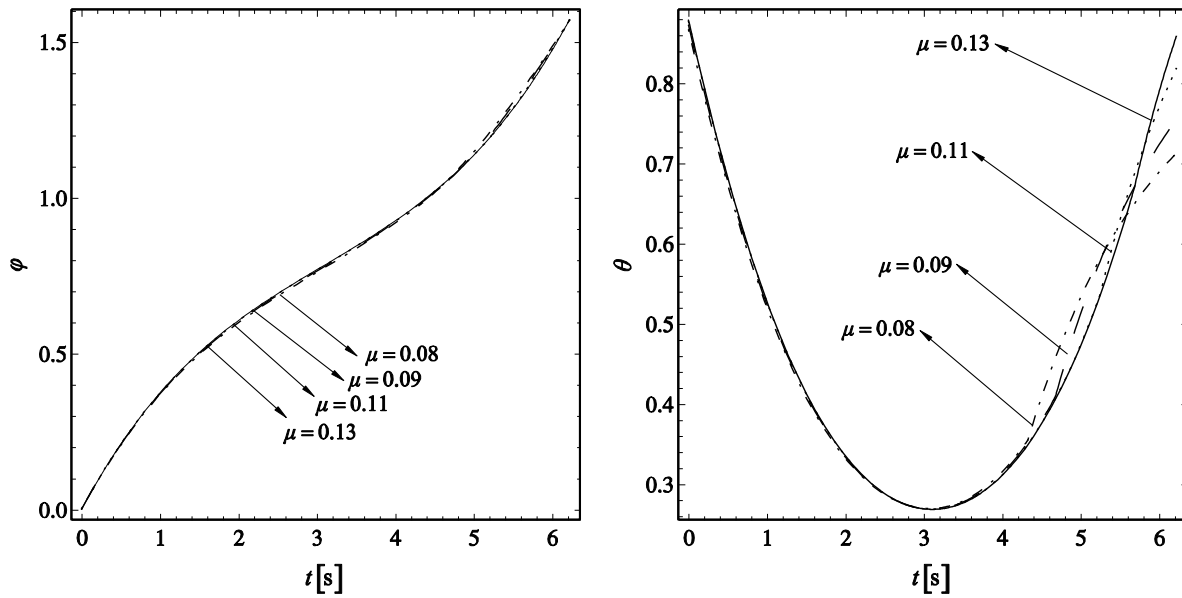
Решења ТРВРР за случај $\varphi_f = \pi / 2$, при различитим вредностима коефицијента μ , као резултат рада програма ГМТТРВРР 1(), приказана су у табели 6.6.

Табела 6.6 Решења ТРВРР за $\varphi_f = \pi / 2$ за случај ограничених реакција нехолономних веза

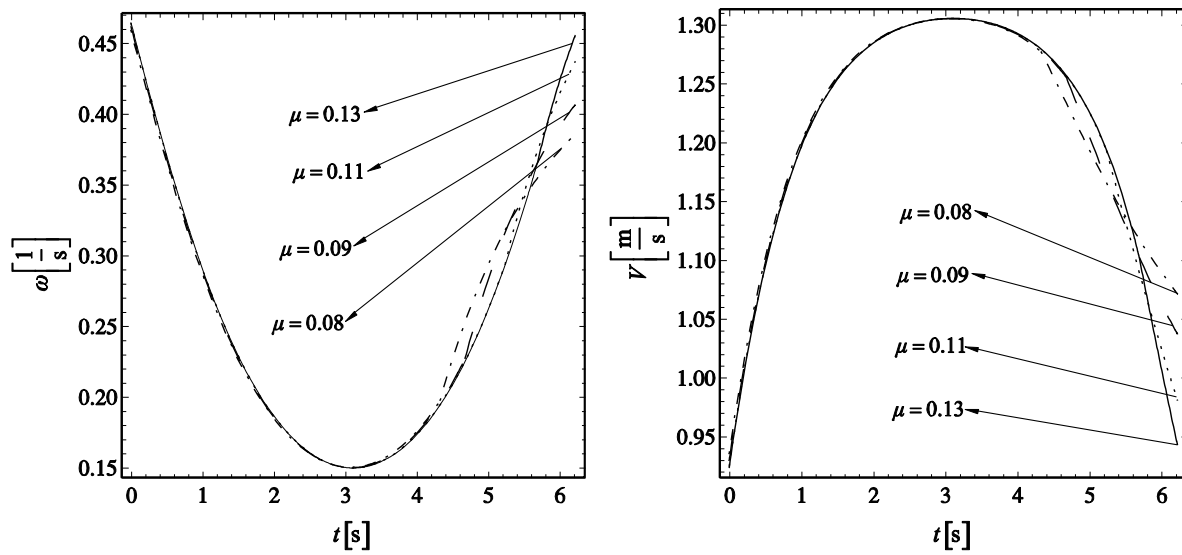
μ	λ_x [s / m]	λ_y [s / m]	t_1 [s]	t_f [s]	V_f [m / s]	$\mu_{1\max}$
0,13	0,51221	0,51218	5,86088	6,22571	0,93142	0,05210
0,11	0,51252	0,51187	5,40027	6,22581	0,96214	0,05870
0,09	0,51424	0,51011	4,84490	6,22668	1,01417	0,05320
0,08	0,51650	0,50778	4,50509	6,22813	1,04739	0,05143



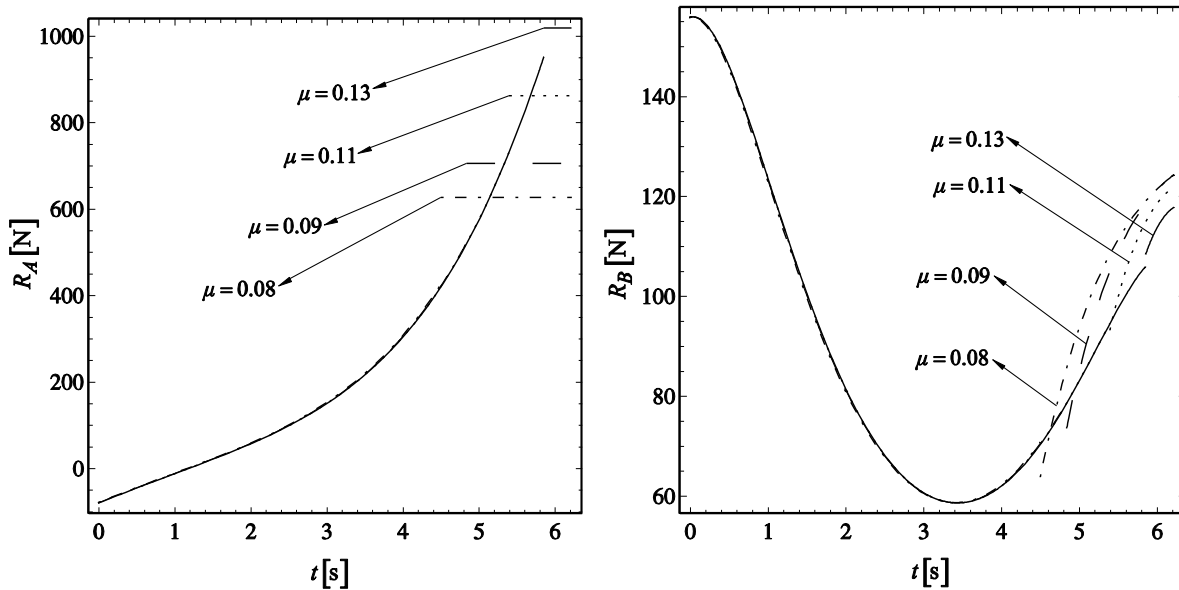
Слика 6.39 Трајекторија тачке B возила за $\varphi_f = \pi / 2$ при различитим вредностима коефицијента μ



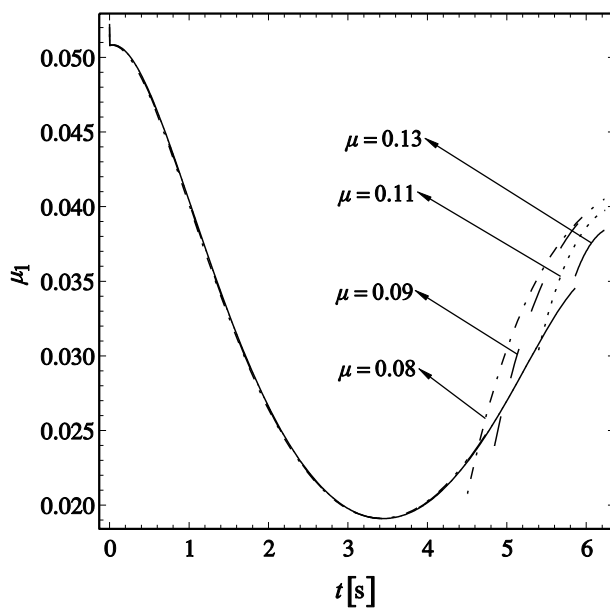
Слика 6.40 Углови φ и ζ за $\varphi_f = \pi/2$ при различитим вредностима коефицијента μ



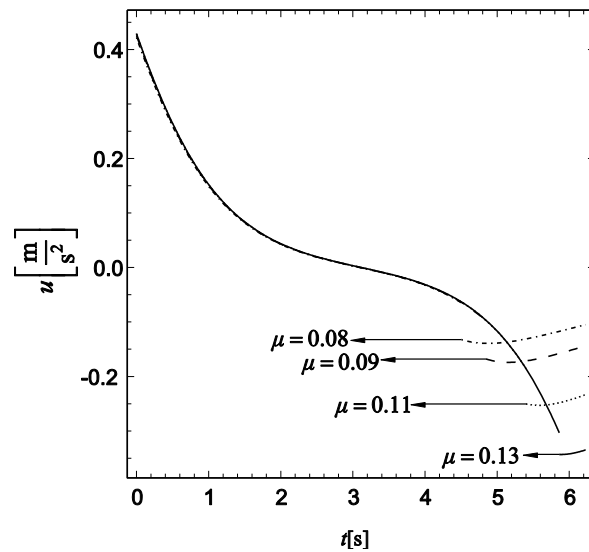
Слика 6.41 Угаона брзина ω и брзина V тачке B возила за $\varphi_f = \pi/2$ при различитим вредностима коефицијента μ



Слика 6.42 Реакције R_A и R_B нехолономних веза за $\varphi_f = \pi/2$ при различитим вредностима коефицијента μ



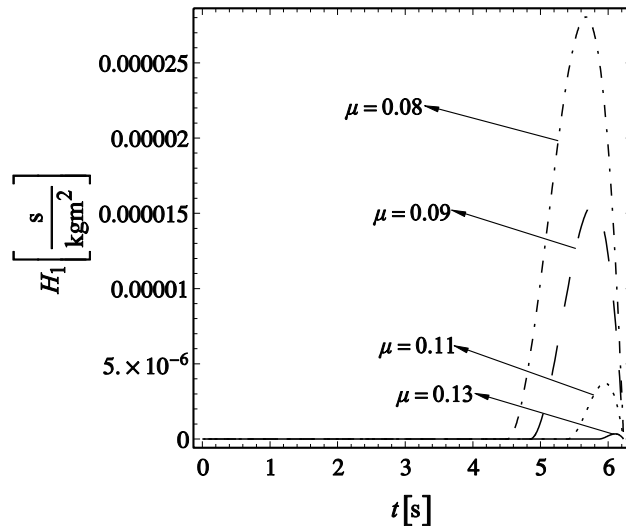
Слика 6.43 Минимално потребна вредност коефицијената μ_1 трења клизања за $\varphi_f = \pi/2$ при различитим вредностима коефицијента μ



Слика 6.44 Оптимално управљање $u = \dot{V}$ за $\varphi_f = \pi/2$ при различитим вредностима коефицијента μ

Будући да оптимално управљање $u = \dot{V}$ има прекид у тачки спрезања сегмената (видети слику 6.44) евидентно је да су услови за спрезање између сингуларног и несингуларног дела управљања на оптималној трајекторији испуњени. Такође, са слике 6.43, где је приказан закон промене функције $\mu_1(t)$ при различитим вредностима коефицијента μ , као и последње колоне табеле 6.6 где су приказане максималне вредности функције $\mu_1(t)$, може се закључити да је у сваком тренутку задовољен услов (6.161), односно, у складу са тим, и неопходан динамички услов (6.117). Из нумерички одређених вредности, приказаних у табели 6.6, може се закључити да је смањење коефицијента μ праћено смањењем интервала који одговара сингуларном делу оптималног управљања, тј. смањењу тренутка t_1 који одговара прекиду функције управљања. Сада се природно намеће следеће питање: колика је минимална гранична вредност коефицијента μ^{**} при којем интервал који одговара сингуларном делу управљања је једнак нули? На основу претходно дефинисаног нумеричког алгоритма, може се одредити гранична вредност $\mu = \mu^{**}$ при којој је $t_1 = 0$, тако што ће се функционалним зависностима у нумеричком

облику $\Gamma_i(z)=0$, $i=\overline{1,5}$, где је сада $z = [t_f, t_1, \lambda_x, \lambda_y, V_f, \mu^{**}]$, придружити функционална зависност $\Gamma_6(z)=0$, на исти начин као што је то дефинисано у првом кораку. Зависност $\Gamma_6(z)=0$ изражава чињеницу да при $t_1=0$ коефицијент μ узима минималну граничну вредност μ^{**} . У складу са тим, добијене су следеће граничне вредности: $t_f = 6,34533\text{s}$, $\mu^{**} = 0,03465$, $\lambda_x = 0,68696\text{s/m}$, $\lambda_y = 0,25953\text{s/m}$ и $V_f = 1,23776\text{m/s}$. На основу нумерички добијених вредности $\mu_{1\max}$, приказаних у табели 6.6, као и одређене граничне вредности $\mu^{**} = 0,03465$, може се закључити да μ^{**} није у складу са условом (6.161), а самим тим и постављеним проблемом оптималног управљања и неопходним динамичким условом (6.117). Сходно томе, случај где коефицијент μ узима вредности у интервалу $\mu^{**} \leq \mu \leq \mu_{1\max}$ није разматран.



Слика 6.45 Функција прекида H_1 за $\varphi_f = \pi/2$ при различитим вредностима коефицијента μ

Са слике 6.45, где је графички приказана функција прекида H_1 при различитим вредностима коефицијента μ , евидентно је $H_1(\tau) > 0 \forall \tau \in (t_1, t_f)$. Може се и овде показати да је неопходан Келијев услов оптималности (6.140) задовољен.

6.5.2 Случај $\varphi_f = \pi$

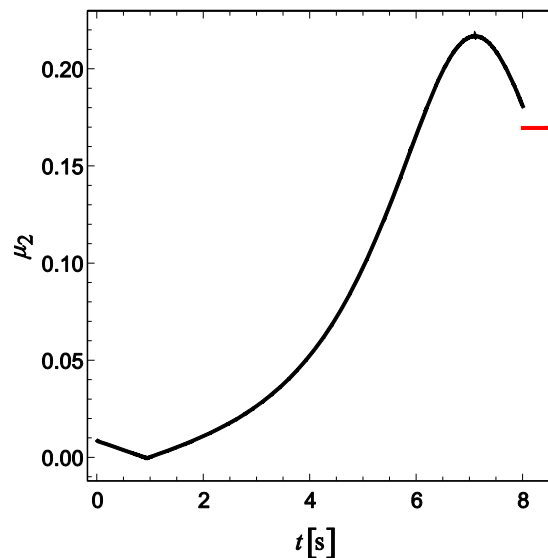
Како бисмо указали на постојање вишеструких решења TPBVP за случај ограничених управљања⁴⁵, одредићемо решења TPBVP при крајњој вредности угла $\varphi_f = \pi$.

Решења TPBVP за случај $\varphi_f = \pi$, при вредности коефицијента $\mu = 0,17$, као резултат рада програма GMTTPBVP1(), приказана су у табели 6.7.

Табела 6.7 Решења TPBVP при $\varphi_f = \pi$ и $\mu = 0,17$ за случај ограничених реакција нехолономних веза

Решења	λ_x [s / m]	λ_y [s / m]	t_1 [s]	t_f [s]	V_f [m / s]	$\mu_{1\max}$
Прво решење	0,50623	0,50619	7,98940	8,45374	-0,92613	0,05766
Друго решење	0,35408	0,66484	4,33173	8,61815	-0,74502	0,05209

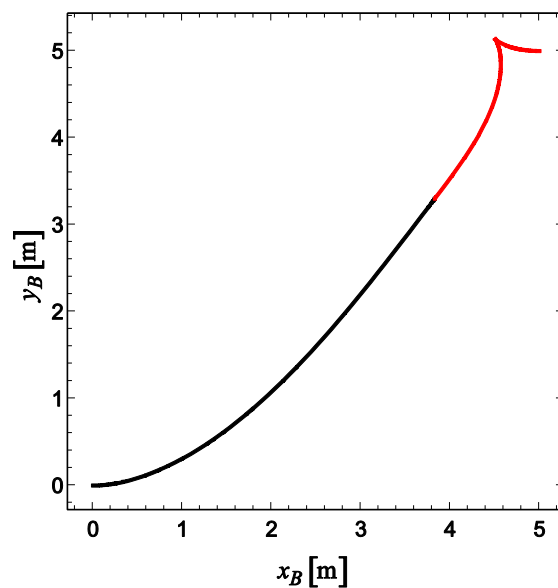
У наставку су дати закони промене поједних величина при вредности коефицијента $\mu = 0,17$.



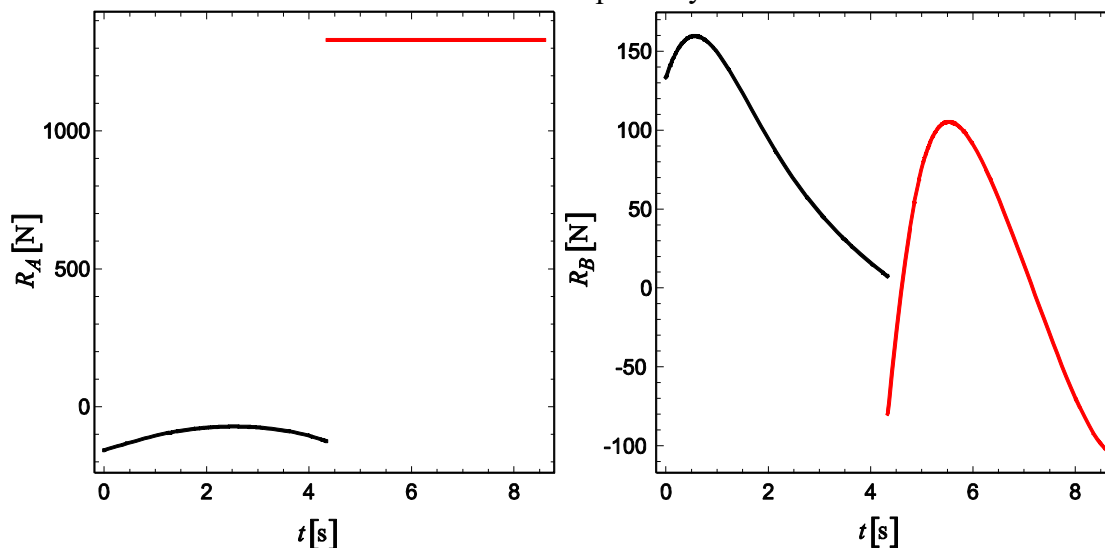
Слика 6.46 Минимално потребна вредност коефицијента μ_2 трења при $\varphi_f = \pi$ и $\mu = 0,17$ која одговара првом решењу

⁴⁵ У конкретном примеру ограничених реакција веза.

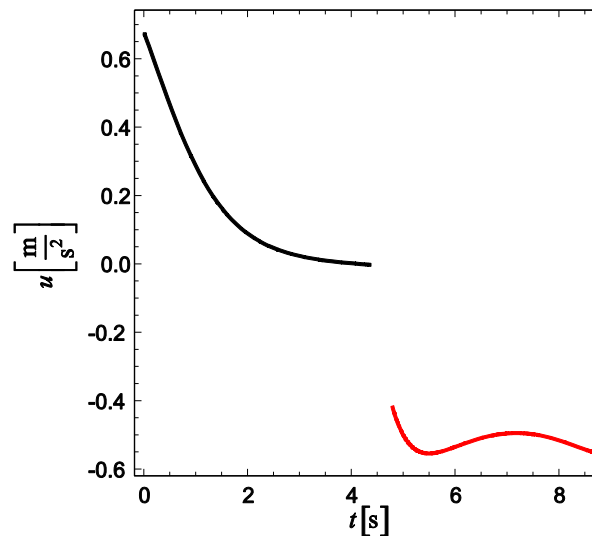
Иако прво решење задовољава неопходан Келијев услов оптималности, са слике 6.46 евидентно је да је $\mu_2(t) > 0,17$ што је недопустивно, те као такво, прво решење се не узима у обзир. На слици 6.47 приказана је трајекторија тачке B возила, која одговара другом решењу, које је уједно и оптимално.



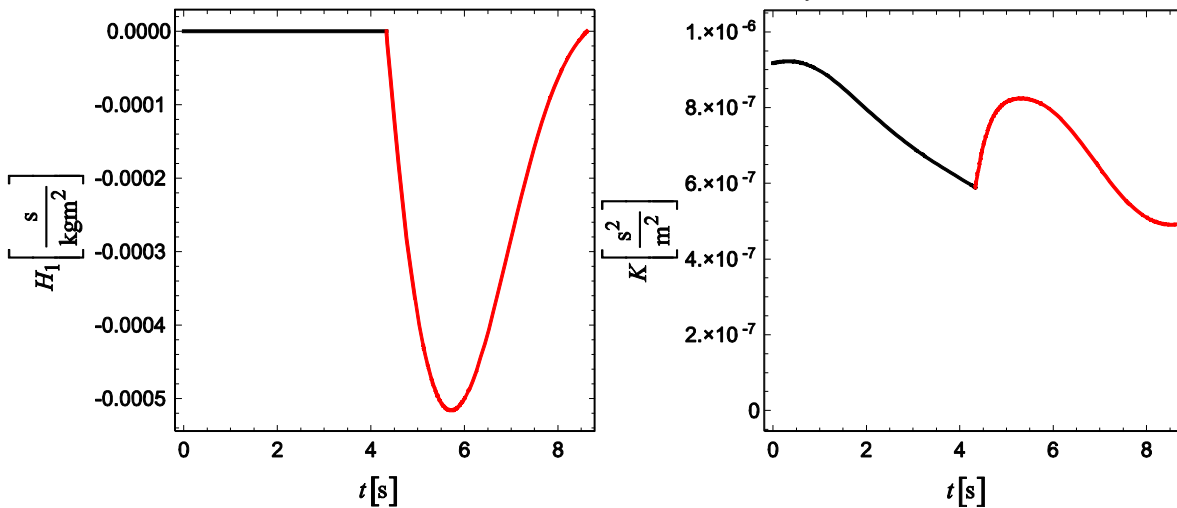
Слика 6.47 Трајекторија тачке B возила при $\varphi_f = \pi$ и $\mu = 0,17$ која одговара оптималном решењу



Слика 6.48 Реакције R_A и R_B нехолономних веза при $\varphi_f = \pi$ и $\mu = 0,17$ које одговарају оптималном решењу



Слика 6.49 Оптимално управљање $u = \dot{V}$ при $\varphi_f = \pi$ и $\mu = 0,17$



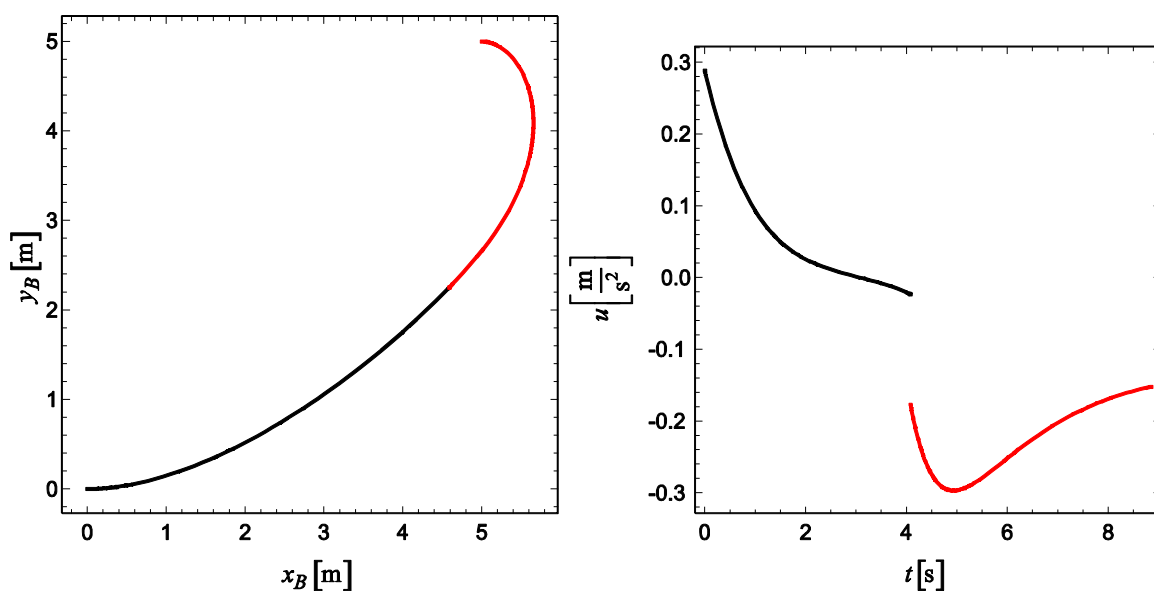
Слика 6.50 Функције H_1 и K при $\varphi_f = \pi$ и $\mu = 0,17$ које одговарају оптималном решењу

Како бисмо указали на то да коефицијент трења μ утиче на промену карактера кретања⁴⁶, одређена су решења ТРВР при вредности коефицијента $\mu = 0,12$, која су приказана у табели 6.8.

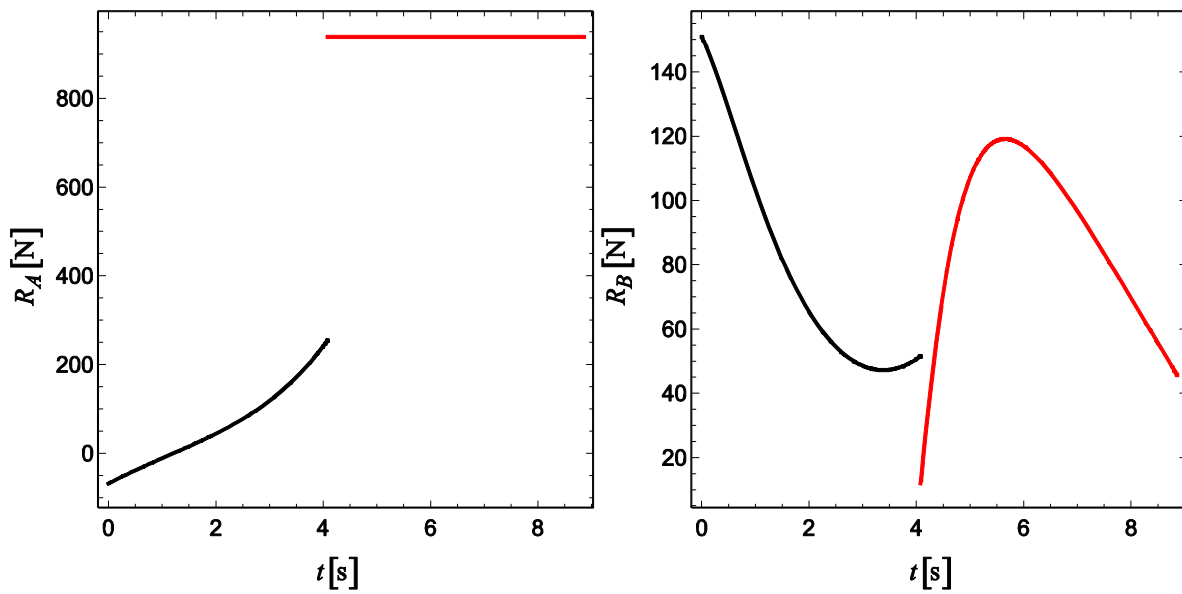
⁴⁶ Оптимално решење ТРВР за случај ограничених реакција нехолономних веза, при вредности коефицијент $\mu = 0,12$, нема зауставних тачака (видети слику 6.51).

Табела 6.8 Решења ТРВVP при $\varphi_f = \pi$ и $\mu = 0,12$ за случај ограничених реакција нехолономних веза

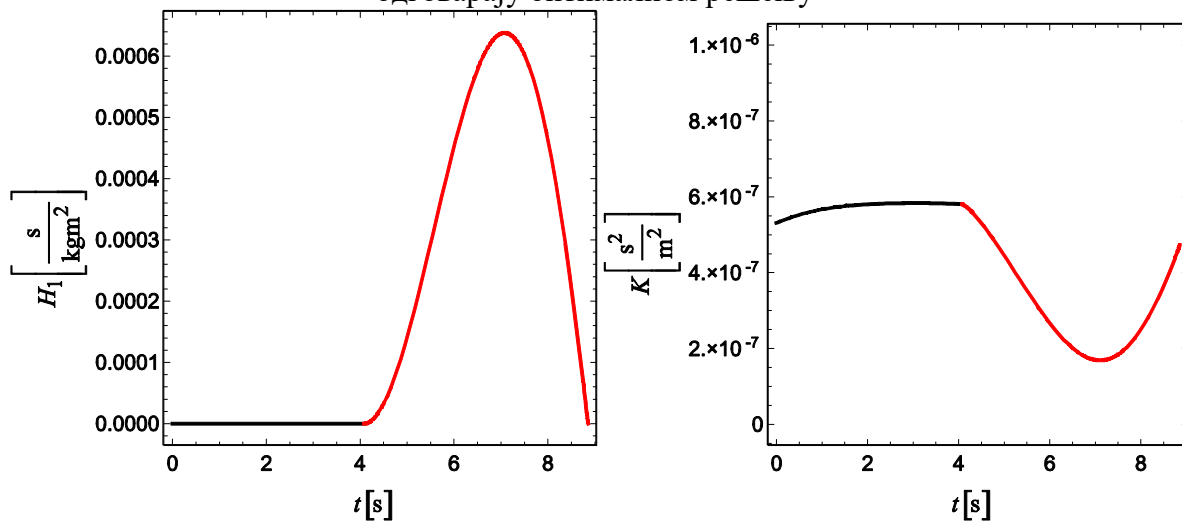
Решења	λ_x [s / m]	λ_y [s / m]	t_1 [s]	t_f [s]	V_f [m / s]	$\mu_{1\max}$
Прво решење	0,59917	0,42135	4,07912	8,85455	0,24073	0,04924
Друго решење	0,52979	0,53705	3,64175	8,88048	0,22153	0,05211



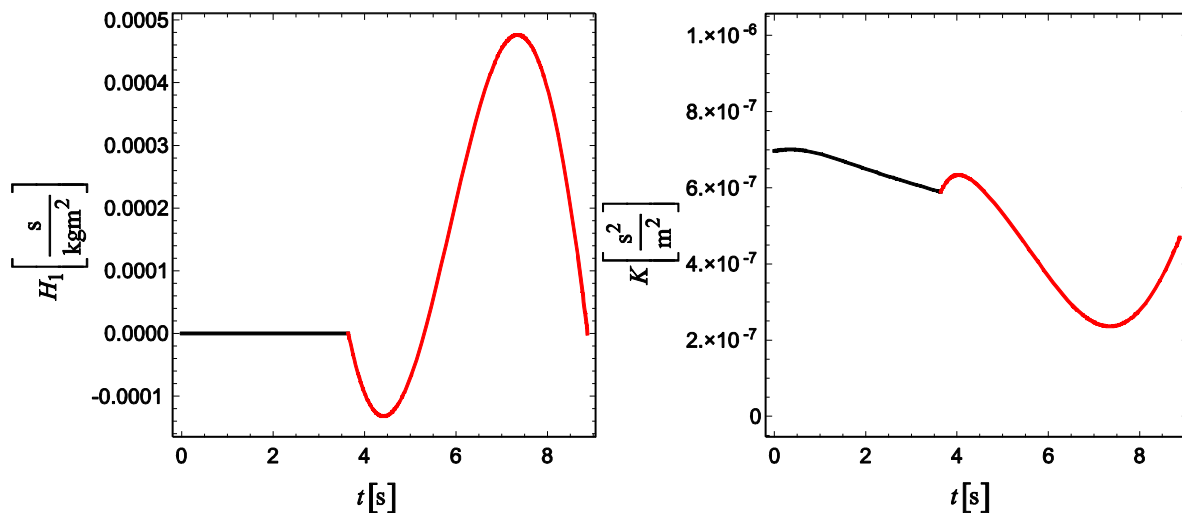
Слика 6.51 Трајекторија тачке B возила и оптимално управљање при $\varphi_f = \pi$ и $\mu = 0,12$



Слика 6.52 Реакције R_A и R_B нехолономних веза при $\varphi_f = \pi$ и $\mu = 0,12$ које одговарају оптималном решењу



Слика 6.53 Функције H_1 и K при $\varphi_f = \pi$ и $\mu = 0,12$ које одговарају оптималном решењу



Слика 6.54 Функције H_1 и K при $\varphi_f = \pi$ и $\mu = 0,12$ које одговарају другом решењу

Литература

- Abell, M. L., Braselton, J.P.: Differential equations with Mathematica, 3rd ed. Amsterdam: Elsevier Academic Press, 2004.
- Apykhtin, N.G., Yakovlev, V.F.: On the motion of dynamically controlled systems with variable masses, *PMM-J Appl Math Mec+*, 44, pp. 301-305, 1980.
- Azizov, A. G.: On the motion of a controlled system of variable mass, *PMM-J Appl Math Mec+*, 50, pp. 433-437, 1986.
- Baird, D., Hughes, R. I. G., Nordmann, A.: Heinrich Hertz: Classical physicist, modern philosopher, Dordrecht: Kluwer Academic, 1998.
- Baruh, H.: Analytical Dynamics, McGraw-Hill, Columbus, OH, 1999.
- Bryson, A. E., Ho, Y. C.: Applied Optimal Control, Hemisphere, New York, 1975.
- Chang, Y. H., Ge, Z. M.: Extended Kane's equations for nonholonomic variable mass system, *J Appl. Mech. (Trans ASME)*, 49, pp. 429-431, 1982.
- Chowdhry, R. S., Cliff, E. M.: Optimal rigid body motions, Part 2: Minimum time solutions, *J. Optimiz. Theory App.*, 70, pp. 255-276, 1991.
- Čović, V., Lukačević, M.: On brachistochronic motions of non-conservative dynamical systems, *Theor. Appl. Mech.*, 7, pp. 41–50, 1981.
- Čović, V., Lukačević, M.: On the brachistochronic motion of non-holonomic mechanical systems, In: *Proceedings of the 16th Yugoslavia Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, Bečići, pp. 17–24, 1984.
- Cvetičanin, L.: Conservation laws in systems with variable mass, *J ApplMech (Trans ASME)*, 60, pp. 954-958, 1993.
- Cvetičanin, L.: Dynamics of bodies with time-variable mass, Switzerland: Springer, 2016.
- Cvetičanin, L.: Dynamics of machines with variable mass, Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1998.
- Gabasov, R., Kirillova, F. M.: High order necessary conditions for optimality, *SIAM J. Control*, 10, pp. 127-168, 1972.
- Ge, Z. M., Cheng, Y. H.: The Hamilton's principle of nonholonomic variable mass systems, *Appl Math Mech-Engl*, 4, pp. 291-302, 1983.

- Ge, Z. M.: The equations of motion of nonlinear nonholonomic variable mass system with applications, *J ApplMech (Trans ASME)*, 51, pp. 435-437, 1984.
- Gelfand, I. M., Fomin, S. V.: *Calculus of Variations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
- Hull, D. G.: Sufficient conditions for a minimum of the free-final-time optimal control problem, *J.Optimiz. TheoryApp.*, 68, pp. 275–287, 1991.
- Irschik, H., Belyaev, A. K.: *Dynamics of mechanical systems with variable mass*, New York: Springer, 2014.
- Jeremić, B, Radulović, R, Obradović, A.: Analysis of the brachistochronic motion of a variable mass nonholonomic mechanical system, *Theoretical and Applied Mechanics*, 43(1), pp. 19-32, 2016.
- Kelley, H., Kopp, R. E., Moyer, G. H.: Singular extremals, In: G., Leitmann (ed.) *Mathematics in Science and Engineering*, 31, *Topics in Optimization*, pp. 63-101, Academic Press, New York, 1967.
- Leitmann, G.: *An Introduction to Optimal Control*. McGraw-Hill, New York, 1966.
- Luo, Y. H., Zhao, Y.D.: Routh's equations for general nonholonomic mechanical systems of variable mass, *Appl Math Mech-Engl*, 14, pp. 285-298, 1993.
- Lurie, A. I.: *Analytical mechanics*, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.
- Martynenko, Yu. G.: The theory of the generalized Magnus effect for non-holonomic mechanical systems, *PMM-J. Appl. Math. Mech.*, 68, pp. 847-855, 2004.
- Matyukhin, V. I.: Control of a wheeled system taking into account its inertial properties, *Mech. Solids+*, 48, pp. 243-253, 2013.
- Matyukhin, V. I.: The control of a wheeled mechanical system, *PMM-J. Appl. Math. Mech.*, 71, pp. 208-220, 2007.
- McDanell, J. P., Powers, W. F.: Necessary conditions for joining optimal singular and nonsingular subarcs, *SIAM J. Control*, 9, pp. 161-173, 1971.
- Neimark J. I., Fufaev, N. A.: *Dynamics of Nonholonomic Systems*, Nauka, Moscow, 1967.
- Obradović, A, Šalinić, S, Jeremić, O.: On the brachistochronic motion of a variable-mass mechanical system in general force fields, *Math. Mech. Solids*, 19, pp. 398-410, 2014.

- Obradović, A.: Singularna optimalna upravljanja mehaničkih sistema, Doktorska disertacija, Beograd, 1994.
- Odia, A., Bell, D. J.: Junction point on partially singular trajectories, *Int. J. Control*, 85, pp. 1996-2003, 2012.
- Papastavridis, J. G.: *Analytical mechanics*, New York: Oxford University Press, 2002.
- Papastavridis, J. G.: *Tensor calculus and analytical dynamics*, Boca Raton, Florida: CRC Press, 1999.
- Pesce, C. P.: The application of Lagrange equations to mechanical systems with mass explicitly dependent on position, *J Appl. Mech. (Trans ASME)*, 70, pp. 751-756, 2003.
- Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R.V.: *The mathematical theory of optimal processes*, New York: Interscience, 1962.
- Qiao, Y.F.: Gibbs-Appell's equations of variable mass nonlinear nonholonomic mechanical systems, *Appl. Math. Mech.-Engl.*, 11, pp. 973-983, 1990.
- Radulović, R., Obradović, A., Šalinić, S., Mitrović, Z.: The brachistochronic motion of a wheeled vehicle, *Nonlinear Dynamics*, 87 (1), pp. 191-205, 2017 (IF = 3,000 za 2015. godinu), First Online: 26 August 2016 (ISSN 0924-090X), [doi 10.1007/s11071-016-3035-3](https://doi.org/10.1007/s11071-016-3035-3).
- Šalinić, S., Obradović, A., Mitrović, Z., Rusov, S.: Brachistochrone with limited reaction of constraint in an arbitrary force field, *Nonlinear Dyn.*, 69, pp. 211-222, 2012.
- Šalinić, S., Obradović, A., Mitrović, Z., Rusov, S.: Erratum: Brachistochrone with limited reaction of constraint in an arbitrary force field (*Nonlinear Dynamics*, 69, pp. 211-222, 2012, DOI :10.1007/s11071-011-0258-1), *Nonlinear Dyn.*, 70, pp. 891-892, 2012.
- Šalinić, S., Obradović, A., Mitrović, Z., Rusov, S.: On the brachistochronic motion of the Chaplygin sleigh, *Acta Mech.*, 224, pp. 2127-2141, 2013.
- Seywald, H., Kumar, R. R.: Singular control in minimum time spacecraft reorientation, *J. Guid. Control Dynam.*, 16, pp. 686-694, 1993.
- Shen, H., Tsiotras, P.: Time-optimal control of axi-symmetric rigid spacecraft using two controls, *J. Guid. Control Dynam.*, 22, pp. 682-694, 1999.
- Soltakhanov, Sh. Kh., Yushkov, M. P., Zegzhda, S. A.: *Mechanics of Non-Holonomic Systems: A New Class of Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.

Stoer, J., Bulirsch, J.: Introduction to numerical analysis, New York: Springer-Verlag, 1993.

Vujanović, B. D., Atanacković, T. M.: An introduction to modern variational techniques in mechanics and engineering, Boston: Birkhäuser, 2004.

Vujanović, B. D.: Metodi optimizacije, Novi Sad, 1980.

Wolfram, S.: The Mathematica Book, 5th ed, Champaign, IL: Wolfram Media, 2003.

Zeković, D., Čović, V.: On the brachistochronic motion of mechanical systems with linear non-holonomic non-homogeneous constraints, Mech. Res. Commun., 20, pp. 25–35, 1993.

Zeković, D.: On the brachistochronic motion of mechanical system with non-holonomic, non-linear and rheonomic constraints, Appl. Math. Mech., 54, pp. 931–935, 1990.

Поглавље 7

Брахистохроно кретање нехолономног механичког система Чаплигиновог типа као изопериметријски проблем

7.1 Формулација и решење проблема оптималног управљања

Као што је познато, нехолономни механички системи Чаплигиновог типа [Neimark, Fufaev, 1967] су специјалан тип система где једначине нехолономних веза, Лагранжијан (тј. кинетичка и потенцијална енергија), као и непотенцијалне генералисане силе не зависе од кинематски зависних q^v координата, тј. генералисаних координата које одговарају зависним генералисаним брзинама \dot{q}^v . У ужем смислу, изопериметријски проблем гласи: између свих затворених кривих линија у равни без самопресечних тачака, које имају једнак задат обим (периметар), потребно је одредити ону која ограничава максималну површину⁴⁷. У ширем смислу, изопериметријски проблеми представљају [Fempl, 1965] све оне проблеме у којима се траже екстремалне вредности функционала при чему су унапред задата ограничења у виду одређених интеграла. Најпре ћемо да разматрамо кретање нехолономног склерономног конзервативног механичког система, имајући у виду резултате до

⁴⁷ Према легенди овај проблем је настао за време оснивања древног града Картагине на обали Северне Африке, познат и под називом Дидонин проблем.

којих смо дошли у Поглављу 5. За потребе даљих разматрања, потребно је дефинисати вектор $\bar{q} = (q^1, \dots, q^m)^T$ кинематски независних координата. Кинетичка и потенцијална енергија система респективно су сада дате као [Lurie, 2002; Papastavridis, 2002]

$$T(\bar{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j, \quad (7.1)$$

$$\Pi = \Pi(\bar{q}), \quad (7.2)$$

где је $\dot{q} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)^T$ вектор генерализаних брзина, док су $a_{ij} = a_{ij}(\bar{q})$ координате коваријантног метричког тензора. Једначине идеалних независних нехолономних нехомогених механичких веза, сада имају следећи облик

$$\psi^v(\bar{q}, \dot{q}) \equiv \dot{q}^v - b_\alpha^v \dot{q}^\alpha - b^v = 0, \quad (7.3)$$

где су $b_\alpha^v = b_\alpha^v(\bar{q})$ и $b^v = b^v(\bar{q})$. Све генерализане брзине \dot{q}^i могу се изразити као линеарна форма независних квазибрзина

$$\dot{q}^i = c_\alpha^i \dot{\pi}^\alpha + \varphi^i, \quad (7.4)$$

где су $\varphi^\alpha = 0$ и $\varphi^v = b^v$, док су $c_\alpha^i = c_\alpha^i(\bar{q})$ непрекидне функције са непрекидним првим изводима у области, у којој разматрамо кретање система. Кинетичка енергија система сада добија следећи облик

$$T^*(\bar{q}, \dot{\pi}) = T(\dot{q}^i = c_\alpha^i \dot{\pi}^\alpha + \varphi^i) = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \dot{\pi}^\alpha \dot{\pi}^\beta + a_{ij} \varphi^i c_\beta^j \dot{\pi}^\beta + \frac{1}{2} a_{ij} \varphi^i \varphi^j, \quad (7.5)$$

где су $G_{\alpha\beta}(\bar{q}) = a_{ij} c_\alpha^i c_\beta^j$ координате коваријантног метричког тензора у односу на кинематски независне координате q^1, \dots, q^m . Механички систем започиње кретање из положаја одређеног генерализаним координатама

$$t_0 = 0, \quad q^\alpha(t_0) = q_0^\alpha, \quad (7.6)$$

⁴⁸ Користи се Ајнштајнова конвенција о сабирању. Индекси у Поглављу 7 узимају следеће вредности: $i, j, k = 1, \dots, n; \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, m; s, z = 1, \dots, m-1; \alpha', \beta', \gamma' = 1, \dots, m'; \alpha'', \beta'', \gamma'' = m'+1, \dots, m; \nu, \rho = m+1, \dots, m+l = n$.

$$q^v(t_0) = q_0^v, \quad (7.7)$$

док је крајњи положај система одређен генералисаним координатама

$$t = t_f, \quad q^\alpha(t_f) = q_f^\alpha, \quad (7.8)$$

$$q^v(t_f) = q_f^v. \quad (7.9)$$

Имајући у виду (7.3) и (7.4), односно (1.12), зависне генералисане брзине сада се могу изразити у следећем облику

$$\dot{q}^v = c_\beta^v \dot{\pi}^\beta + b^v, \quad (7.10)$$

где су $c_\beta^v(\bar{q}) = b_\alpha^v c_\beta^\alpha$. Сада, на основу (7.7), (7.9) и (7.10), можемо писати

$$q_f^v - q_0^v = C^v = \int_0^{t_f} (c_\alpha^v \dot{\pi}^\alpha + b^v) dt, \quad (7.11)$$

где су $C^v = \text{const.}$. Како се механички систем креће у произвољном пољу познатих потенцијалних сила, важи „закон” о одржању укупне механичке енергије [Lurie, 2002; Papastavridis, 2002]

$$\Theta(\bar{q}, \dot{\pi}) = T^*(\bar{q}, \dot{\pi}) + \Pi(\bar{q}) - E_0 = 0, \quad (7.12)$$

где је $\dot{\pi} = (\dot{\pi}^1, \dots, \dot{\pi}^m)^T$ вектор независних квазибрзина, док је $E_0 \in \mathbb{R}$ вредност механичке енергије система у почетном тренутку $t_0 = 0$. Узимањем независних квазибрзина $\dot{\pi}^\alpha$ за управљачке променљиве u^α респективно

$$\dot{\pi}^\alpha = u^\alpha, \quad (7.13)$$

ограничења (7.11) у виду одређених интеграла добијају следећи облик

$$q_f^v - q_0^v = C^v = \int_0^{t_f} (c_\alpha^v u^\alpha + b^v) dt. \quad (7.14)$$

Брахистохрони проблем механичког система састоји се у одређивању екстремалних управљања $u^\alpha = u^\alpha(t)$, као и њима одговарајућих генералисаних координата, тако да механички систем, који започиње кретање из положаја (7.6) и (7.7), пређе у крајњи

положај (7.8) и (7.9), уз неизмењену вредност механичке енергије (7.12), за минимално време t_f . Брахистохрони проблем система, који је постављен као изопериметријски проблем, састоји се у одређивању екстремалних управљања $u^i = u^i(t)$ тражењем екстремалне вредности функционала

$$J(\bar{q}, \mathbf{u}) = \int_0^{t_f} dt, \quad (7.15)$$

где је $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)^T$ вектор управљања из отвореног скупа G_u векторског простора V_m , имајући у виду ограничења (7.14) у виду одређених интеграла. Понтрјагинова функција има следећи облик [Vuković, 1984; Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962; Bryson, Ho, 1975; Hull, 2003; Hull, 1990]

$$H(\bar{q}, \mathbf{u}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \lambda_0 + \lambda_\alpha c_\beta^\alpha u^\beta. \quad (7.16)$$

На основу резултата до којих се дошло у [Leitmann, 1981], имајући у виду ограничења (7.14), можемо писати

$$\bar{H}(\bar{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \triangleq H(\bar{q}, \mathbf{u}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) + \lambda_\nu (c_\alpha^\nu u^\alpha + b^\nu), \quad (7.17)$$

где је $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$ спрегнути вектор и $\lambda_0 = \text{const.} \leq 0$, док су $\lambda_i(\cdot) : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ и $\lambda_\nu \equiv \text{const.}$ [Leitmann, 1981]. На основу (7.16) и (7.17), Понтрјагинова функција \bar{H} добија коначан облик [Leitmann, 1981]

$$\bar{H}(\bar{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 + \lambda_i (c_\alpha^i u^\alpha + \varphi^i). \quad (7.18)$$

Спрегнути систем диференцијалних једначина, имајући у виду Понтрјагинову функцију (7.18), као и релацију ограничења (7.12), има следећи облик [Leitmann, 1981]

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_\alpha &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial q^\alpha} + \mu \frac{\partial \Theta}{\partial q^\alpha}, \\ \dot{\lambda}_\nu &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial q^\nu} + \mu \frac{\partial \Theta}{\partial q^\nu} \equiv 0, \end{aligned} \quad (7.19)$$

одакле је евидентно да су $\lambda_\gamma \equiv \text{const.}$. Спроведећи поступак приказан у Поглављу 4, односно, Поглављу 5, одређен је Лагранжев множитељ μ

$$\mu(\bar{q}) = -\frac{\lambda_0}{2[E_0 - \Pi(\bar{q})]}, \quad (7.20)$$

док се екстремална управљања u^α сада добијају у следећем облику

$$u^\alpha(\bar{q}, \lambda) = -G^{\alpha\beta}(\bar{q}) \left[\frac{2[E_0 - \Pi(\bar{q})]}{\lambda_0} \lambda_i c_\beta^i + a_{ij} \varphi^i c_\beta^j \right], \quad (7.21)$$

где су $G^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta}(\bar{q})$ координате контраваријантног метричког тензора у односу на кинематски независне координате q^1, \dots, q^m . Диференцијалне једначине основног и спрегнутог систем сада имају следећи облик

$$\dot{q}^\alpha(\bar{q}, \lambda) = -G^{\beta\gamma} c_\beta^\alpha \left[\frac{2[E_0 - \Pi(\bar{q})]}{\lambda_0} \lambda_i c_\gamma^i + a_{ij} \varphi^i c_\gamma^j \right], \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_\alpha(\bar{q}, \lambda) &= G^{\beta\gamma} \frac{\partial c_\beta^i}{\partial q^\alpha} \lambda_i \left[\frac{2[E_0 - \Pi(\bar{q})]}{\lambda_0} \lambda_j c_\gamma^j + a_{ij} \varphi^i c_\gamma^j \right] - \lambda_i \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^\alpha} \\ &\quad - \frac{\lambda_0}{2[E_0 - \Pi(\bar{q})]} \frac{\partial \Theta(\bar{q}, u)}{\partial q^\alpha}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

док за случај да је механички систем подвргнут хомогеним нехолономним везама ($\varphi^i = 0$), једначине (7.22) и (7.23) добијају следећи облик

$$\dot{q}^\alpha(\bar{q}, \lambda) = -\frac{2[E_0 - \Pi(\bar{q})]}{\lambda_0} G^{\beta\gamma} c_\beta^\alpha c_\gamma^i \lambda_i, \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_\alpha(\bar{q}, \lambda) &= \frac{2[E_0 - \Pi(\bar{q})]}{\lambda_0} G^{\beta\gamma} \lambda_i \frac{\partial c_\beta^i}{\partial q^\alpha} \lambda_j c_\gamma^j - \frac{\lambda_0}{2[E_0 - \Pi(\bar{q})]} \frac{\partial \Theta(\bar{q}, u)}{\partial q^\alpha} \\ &= \frac{2[E_0 - \Pi(\bar{q})]}{\lambda_0} c_\gamma^j \left(G^{\beta\gamma} \frac{\partial c_\beta^i}{\partial q^\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial G^{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} c_\beta^i \right) \lambda_i \lambda_j - \frac{\lambda_0}{2[E_0 - \Pi(\bar{q})]} \frac{\partial \Pi(\bar{q})}{\partial q^\alpha}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Ограничења (7.14), имајући у виду (7.21), добијају коначан облик

$$q_f^v - q_0^v = C^v = \int_0^{t_f} \left\{ -c_\alpha^v G^{\alpha\beta} \left[\frac{2[E_0 - \Pi(\bar{q})]}{\lambda_0} \lambda_i c_\beta^i + a_{ij} \varphi^i c_\beta^j \right] + b^v \right\} dt, \quad (7.26)$$

док за случај $\varphi^i = 0$ постају

$$q_f^v - q_0^v = C^v = -\frac{2}{\lambda_0} \int_0^{t_f} \left\{ [E_0 - \Pi(\bar{q})] G^{\alpha\beta} c_\alpha^v c_\beta^i \lambda_i \right\} dt. \quad (7.27)$$

За случај да једначине нехолономних веза, кинетичка, као и потенцијална енергија не зависе не само од кинематски зависних координата q^v , већ и од кинематски независних координата $q^{\alpha'}$, једначине (7.22) и (7.23) добијају следећи облик

$$\dot{q}^{\alpha'}(\bar{q}, \lambda) = -G^{\beta\gamma} c_\beta^{\alpha'} \left[\frac{2[E_0 - \Pi(\bar{q})]}{\lambda_0} \lambda_i c_\gamma^i + a_{ij} \varphi^i c_\gamma^j \right], \quad (7.28)$$

$$\lambda_{\alpha'}(\bar{q}, \lambda) = G^{\beta\gamma} \frac{\partial c_\beta^i}{\partial q^{\alpha'}} \lambda_i \left[\frac{2[E_0 - \Pi(\bar{q})]}{\lambda_0} \lambda_j c_\gamma^j + a_{ij} \varphi^i c_\gamma^j \right] - \lambda_i \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^{\alpha'}} - \frac{\lambda_0}{2[E_0 - \Pi(\bar{q})]} \frac{\partial \Theta(\bar{q}, u)}{\partial q^{\alpha'}}, \quad (7.29)$$

док за случај $\varphi^i = 0$ постају

$$\dot{q}^{\alpha'}(\bar{q}, \lambda) = -\frac{2[E_0 - \Pi(\bar{q})]}{\lambda_0} G^{\beta\gamma} c_\beta^{\alpha'} c_\gamma^i \lambda_i, \quad (7.30)$$

$$\lambda_{\alpha'}(\bar{q}, \lambda) = \frac{2[E_0 - \Pi(\bar{q})]}{\lambda_0} c_\gamma^j \left(G^{\beta\gamma} \frac{\partial c_\beta^i}{\partial q^{\alpha'}} + \frac{1}{2} \frac{\partial G^{\beta\gamma}}{\partial q^{\alpha'}} c_\beta^i \right) \lambda_i \lambda_j - \frac{\lambda_0}{2[E_0 - \Pi(\bar{q})]} \frac{\partial \Pi(\bar{q})}{\partial q^{\alpha'}}, \quad (7.31)$$

где је $\bar{q} = (q^1, \dots, q^{m'})^T$. У овом случају, ограничењима (7.26), односно (7.27) потребно је придружити следећа ограничења у виду одређених интеграла респективно

$$q_f^{\alpha''} - q_0^{\alpha''} = C^{\alpha''} = \int_0^{t_f} \left\{ -c_{\alpha}^{\alpha''} G^{\alpha\beta} \left[\frac{2[E_0 - \Pi(\bar{q})]}{\lambda_0} \lambda_i c_{\beta}^i + a_{ij} \varphi^i c_{\beta}^j \right] \right\} dt, \quad (7.32)$$

$$q_f^{\alpha''} - q_0^{\alpha''} = C^{\alpha''} = -\frac{2}{\lambda_0} \int_0^{t_f} \left\{ [E_0 - \Pi(\bar{q})] G^{\alpha\beta} c_{\alpha}^{\alpha''} c_{\beta}^i \lambda_i \right\} dt. \quad (7.33)$$

На основу првог интеграла

$$\lambda_0 + \lambda_{i0} \left(c_{\alpha 0}^i u_0^{\alpha} + \varphi_0^i \right) = 0, \quad (7.34)$$

одређеног у почетном тренутку $t_0 = 0$, имајући у виду притом (7.21), добија се

$$\lambda_0 - \frac{2(E_0 - \Pi_0)}{\lambda_0} G_0^{\alpha\beta} c_{\alpha 0}^i c_{\beta 0}^j \lambda_{i0} \lambda_{j0} - G_0^{\alpha\beta} a_{jk0} \varphi_0^k c_{\alpha 0}^i c_{\beta 0}^j \lambda_{i0} + \lambda_{i0} \varphi_0^i = 0, \quad (7.35)$$

док за случај $\varphi^i = 0$, добија се следећа, у општем случају, семидефинитна квадратна форма

$$G_0^{\alpha\beta} c_{\alpha 0}^i c_{\beta 0}^j \lambda_{i0} \lambda_{j0} = \frac{\lambda_0^2}{2(E_0 - \Pi_0)} = \text{const.}, \quad (7.36)$$

где су $\lambda_{i0} = \lambda_i(t_0)$, $a_{ij0} = a_{ij}(\bar{q}_0)$, $G_0^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta}(\bar{q}_0)$, $c_{\alpha 0}^i = c_{\alpha}^i(\bar{q}_0)$, $\varphi_0^i = \varphi^i(\bar{q}_0)$, $\Pi_0 = \Pi(\bar{q}_0)$

и $q_0 = (q_0^1, \dots, q_0^n)$. Ако се има у виду да се једна од координата спрегнутог вектора у почетном тренутку може изразити из (7.27), односно (7.28), у функцији од преосталих, као и да је крајњи тренутак t_f непознат, број непознатих граничних услова који се одређују једнак је такође броју геометријски независних координата n . Оно што је овде битно истаћи је да се полазни систем кога чине $2n$ диференцијалних једначина првог реда у нормалном облику (основни и спрегнути систем), за нехолономне механичке системе Чаплигиновог типа, редукује на систем $2m$ реда. Наиме, показано је да се при брахистохроном кретању нехолономног механичког система Чаплигиновог типа може извршити снижавање реда система.

Након одређених непознатих граничних вредности, одређивање кинематски зависних координата q^y своди се на квадратуру

$$q^v(t) = q_0^v + \int_0^t \left\{ -c_\alpha^v G^{\alpha\beta} \left[\frac{2[E_0 - \Pi(\bar{q})]}{\lambda_0} \lambda_\gamma c_\beta^i + a_{ij} \phi^i c_\beta^j \right] + b^v \right\} dt, \quad (7.37)$$

где је $t \in [0, t_f]$. Због чињенице да се кинематски зависне q^v координате „игноришу” приликом интеграције једначина (7.22) и (7.23), односно (7.24) и (7.25), у англосаксонској литератури оне често носе назив *ignorable coordinates*.

У циљу уопштења приказаног поступка, у наставку разматрамо брахистохрони проблем нехолономног механичког система променљиве масе⁴⁹ који се креће у произвољном познатом пољу сила, имајући у виду резултате до којих смо дошли у Поглављу 6. Релативне брзине припајања или одвајања или истовременог припајања и одвајања честица су

$$\vec{v}_p^{rel} = \vec{v}_p^{rel}(\bar{q}, \dot{q}, t), \quad p = 1, \dots, N. \quad (7.38)$$

Нека се механички систем креће у пољу познатих потенцијалних сила са потенцијалном енергијом

$$\Pi = \Pi(\bar{q}, t). \quad (7.39)$$

Генералисане силе које одговарају геометријски независним координатама q^i у општем случају могу се приказати у следећем облику

$$Q_i(\bar{q}, \dot{q}, t) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i^w + Q_i^{\text{var}} + Q_i^c + Q_i^\Lambda, \quad (7.40)$$

док су генералисане силе које одговарају кинематски независним координатама

$$\tilde{Q}_\alpha(\bar{q}, \dot{\pi}, t) = c_\alpha^i Q_i^*, \quad (7.41)$$

где су $Q_i^* = Q_i(\dot{q}^i = c_\alpha^i \dot{\pi}^\alpha)$. На основу једначина (6.5) нехолономних веза, имајући у виду (6.24) и (6.26), можемо формирати ограничења у виду одређених интеграла

$$q_f^v - q_0^v = C^v = \int_0^{t_f} c_\alpha^v V^\alpha dt, \quad (7.42)$$

⁴⁹ Нехолономни механички систем је такође Чаплигиновог типа.

где су $V^\alpha = \dot{\pi}^\alpha$. Једначине стања, имајући у виду (6.14), (6.23) и (6.29), одређене су као

$$\begin{aligned}\dot{q}^\alpha &= f^\alpha(\bar{q}, V, q^{n+1}, \mathbf{u}) \equiv c_\beta^\alpha V^\beta, \\ \dot{q}^{n+1} &= f^{n+1}(\bar{q}, V, q^{n+1}, \mathbf{u}) \equiv 1, \\ \dot{V}^s &= f^{n+1+s}(\bar{q}, V, q^{n+1}, \mathbf{u}) \equiv u^s, \\ \dot{V}^m &= f^{n+1+m}(\bar{q}, V, q^{n+1}, \mathbf{u}) \equiv \Phi(\bar{q}, V, q^{n+1}) + \Phi_s(\bar{q}, V, q^{n+1})u^s.\end{aligned}\tag{7.43}$$

Понтрјагинова функција сада има следећи облик [Vuković, 1984; Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko, 1962; Bryson, Ho, 1975; Hull, 2003; Hull, 1990]

$$H(\bar{q}, V, q^{n+1}, \mathbf{u}, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mathbf{v}) = -1 + \lambda_\alpha c_\beta^\alpha V^\beta + \lambda_{n+1} + v_s u^s + v_m(\Phi + \Phi_s u^s),\tag{7.44}$$

односно, имајући у виду ограничења (7.42),

$$\begin{aligned}\bar{H}(\bar{q}, V, q^{n+1}, \mathbf{u}, \lambda, \mathbf{v}) &\triangleq H(\bar{q}, V, q^{n+1}, \mathbf{u}, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mathbf{v}) + \lambda_\nu c_\alpha^\nu V^\alpha \\ &\equiv -1 + \lambda_j c_\beta^j V^\beta + \lambda_{n+1} + v_s u^s + v_m(\Phi + \Phi_s u^s),\end{aligned}\tag{7.45}$$

где су $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1})^T$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$, док су $\lambda_i(\cdot) : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda_\nu \equiv \text{const.}$, $\lambda_{n+1}(\cdot) : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ и $v_\alpha(\cdot) : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ координате спрегнутог вектора, тако да спрегнути систем диференцијалних једначина сада има следећи облик

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_\alpha &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial q^\alpha} = -\lambda_j \frac{\partial c_\beta^j}{\partial q^\alpha} V^\beta - v_m \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial q^\alpha} u^s \right), \\ \dot{\lambda}_\nu &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial q^\nu} \equiv 0, \\ \dot{\lambda}_{n+1} &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial q^{n+1}} = -\lambda_j \frac{\partial c_\beta^j}{\partial q^{n+1}} V^\beta - v_m \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q^{n+1}} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial q^{n+1}} u^s \right), \\ \dot{v}_\alpha &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial V^\alpha} = -\lambda_j c_\alpha^j - v_m \left(\frac{\partial \Phi}{\partial V^\alpha} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial V^\alpha} u^s \right).\end{aligned}\tag{7.46}$$

Спроводећи исти поступак као у Поглављу 6, може се формирати основни и спрегнути систем, кога сада чине укупно $2m+3$ диференцијалних једначина првог реда у нормалном облику, који сада има следећи облик

$$\begin{aligned}
 \dot{q}^\alpha &= c_\beta^\alpha V^\beta, \\
 \dot{q}^{n+1} &= 1, \\
 \dot{V}^\alpha &= \dot{V}^\alpha(\bar{q}, V, q^{n+1}, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n, v_m), \\
 \dot{\lambda}_m &= \dot{\lambda}_m(\bar{q}, V, q^{n+1}, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n, v_m), \\
 \dot{v}_m &= \dot{v}_m(\bar{q}, V, q^{n+1}, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n, v_m).
 \end{aligned} \tag{7.47}$$

Број непознатих граничних услова који се одређују је такође $n+1$. Имајући у виду да су $V(t_f) = V_f$, $v_m(t_f) = 0$ и

$$\begin{aligned}
 \lambda_m(t_f) &= \lambda_m(V(t_f), q^{n+1}(t_f), \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n) \\
 &= \frac{1 - \lambda_p(c_\alpha^p(t_f) - \Omega_z^s(t_f)\omega_s^p(t_f)c_\alpha^z(t_f))V^\alpha(t_f)}{(c_\alpha^m(t_f) - \Omega_z^s(t_f)\omega_s^m(t_f)c_\alpha^z(t_f))V^\alpha(t_f)},
 \end{aligned} \tag{7.48}$$

у циљу решења постављеног Кошијевог проблема (7.47), могуће је сада успоставити $n+1$ релација у нумеричком облику

$$\begin{aligned}
 q_0^\alpha &= h^\alpha(V_f, q_f^{n+1}, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n), \\
 C^v &= h^v(V_f, q_f^{n+1}, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n), \\
 E_0 &= h^{n+1}(V_f, q_f^{n+1}, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n).
 \end{aligned} \tag{7.49}$$

Функције (7.49) могу бити формиране у програмском окружењу *Wolfram Mathematica* на следећи начин

$$\begin{aligned}
h^\alpha \left[q_f^{n+1} \text{?NumberQ}, V_f^1 \text{?NumberQ}, \dots, V_f^m \text{?NumberQ}, \lambda_{m+1} \text{?NumberQ}, \dots, \right. \\
\left. \lambda_n \text{?NumberQ} \right] &:= \text{First} \left[q^\alpha[0] / .\text{NDSolve}[\dots] \right], \\
h^\nu \left[q_f^{n+1} \text{?NumberQ}, V_f^1 \text{?NumberQ}, \dots, V_f^m \text{?NumberQ}, \lambda_{m+1} \text{?NumberQ}, \dots, \right. \\
\left. \lambda_n \text{?NumberQ} \right] &:= \text{First} \left[\text{NIntegrate}[c_\alpha^\nu V^\alpha, \{0, t_f\}] / .\text{NDSolve}[\dots] \right], \\
h^{n+1} \left[q_f^{n+1} \text{?NumberQ}, V_f^1 \text{?NumberQ}, \dots, V_f^m \text{?NumberQ}, \lambda_{m+1} \text{?NumberQ}, \dots, \right. \\
\left. \lambda_n \text{?NumberQ} \right] &:= \text{First} \left[T^* \left(q^\alpha[0], \pi[0], t_0 \right) + \Pi \left(q^\alpha[0], t_0 \right) / .\text{NDSolve}[\dots] \right].
\end{aligned} \tag{7.50}$$

7.2 Пример 1

Најпре ћемо да разматрамо брахистохрони проблем Чаплигинових саоница као изопериметријски проблем, имајући у виду резултате до којих смо дошли у нумеричком примеру 1–Поглавље 5. За кинематски независне координате одаберимо угао φ и Декартову координату x тачке A сечива. Кинетичка енергија Чаплигинових саоница одређена је следећим изразом

$$T^*(V, \omega) = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} m a^2 k^2 \omega^2, \tag{7.51}$$

док једначина нехолономне везе има следећи облик

$$\psi(\varphi, \dot{x}, \dot{y}) \equiv \dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0. \tag{7.52}$$

Релација ограничења (7.12), на основу (5.24), гласи

$$\Theta(V, \omega) = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} m a^2 k^2 \omega^2 - T_0 = 0, \tag{7.53}$$

где је $k^2 = 1 + I_C / (m a^2)$, док је $T_0 \in \mathbb{R}$ кинетичка енергија саоница у почетном тренутку $t_0 = 0$. Како једначина (7.52) нехолономне везе, као и релација ограничења (7.53), не зависе не само од кинематски зависне координате y , већ и од кинематски независне координате x , можемо констатовати да Чаплигинове саонице за овакав избор генералисаних координата јесу Чаплигиновог типа, а да се основи и спрегнути

систем диференцијалних једначина може формирати на основу поступка приказаног у претходном делу овог поглавља, односно на основу (7.30) и (7.31). Екстремална управљања, одређена на основу (7.21), имају следећи облик

$$\begin{aligned} V &= \frac{2T_0}{m} (\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi), \\ \omega &= \frac{2T_0}{m} \frac{1}{a^2 k^2} \lambda_\varphi, \end{aligned} \quad (7.54)$$

где су $\lambda_x \equiv \text{const.}$ и $\lambda_y \equiv \text{const.}$, док ограничења у виду одређених интеграла, на основу (7.27) и (7.33), имају следећи облик

$$\begin{aligned} x_f - x_0 &= \frac{2T_0}{m} \int_0^{t_f} (\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi) \cos \varphi dt, \\ y_f - y_0 &= \frac{2T_0}{m} \int_0^{t_f} (\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi) \sin \varphi dt. \end{aligned} \quad (7.55)$$

На основу (7.30) и (7.31), за $\lambda_0 = -1$, формираћемо основи и спрегнути систем диференцијалних једначина, који сада има следећи облик

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{2T_0}{m} \frac{1}{a^2 k^2} \lambda_\varphi, \\ \dot{\lambda}_\varphi &= \frac{2T_0}{m} (\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi) (\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi), \end{aligned} \quad (7.56)$$

док се на основу (7.36), може изразити координата $\lambda_{\varphi 0}$ спрегнутог вектора у почетном тренутку

$$\lambda_{\varphi 0} = \pm ak \sqrt{\frac{m}{2T_0} - \lambda_x^2}. \quad (7.57)$$

Полазни систем (5.31) кога чине шест диференцијалних једначина првог реда, применом поступка изложеног у овом поглављу, се редукује на систем (7.56) кога сада чине две диференцијалне једначине првог реда. Након одређених непознатих граничних услова λ_x, λ_y и t_f , одређивање коначних једначина кретања тачке A сечива своди се на квадратуру

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + \frac{2T_0}{m} \int_0^t (\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi) \cos \varphi dt, \\y(t) &= y_0 + \frac{2T_0}{m} \int_0^t (\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi) \sin \varphi dt,\end{aligned}\tag{7.58}$$

где же $t \in [0, t_f]$.

7.3 Пример 2

У примеру 2 разматрамо брахистохрони проблем нехолономног механичког система са управним брзинама као изопериметријски проблем, имајући у виду резултате до којих смо дошли у нумеричком примеру 2–Поглавље 5. За кинематски независне координате одаберимо угао φ и релативну координату ζ тачке B у односу на покретни координатни систем. Сходно ограничењу кретања тачака A и B система, једначине нехолономних веза имају следећи облик

$$\begin{aligned}\psi^3(\varphi, \dot{x}, \dot{y}) &\equiv \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi = 0, \\ \psi^4(\varphi, \zeta, \dot{x}, \dot{y}) &\equiv -\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi + \zeta \dot{\varphi} = 0.\end{aligned}\tag{7.59}$$

Релација ограничења (7.12), на основу (5.57), гласи

$$\Theta(V_A, V_B) = \frac{1}{2}m(V_A^2 + V_B^2) + \frac{1}{2}k\left[(\zeta - l_0 - L)^2 - (\zeta(t_0) - l_0 - L)^2\right] - E_0 = 0,\tag{7.60}$$

где је $E_0 \in \mathbb{R}$ механичка енергија система у почетном тренутку $t_0 = 0$. Како једначине (7.59) нехолономних веза, као и релација ограничења (7.60), не зависе од кинематски зависних координата x и y , можемо такође констатовати да нехолономни механички систем са управним брзинама, за овакав избор генералисаних координата, јесте Чаплигиновог типа. Екстремална управљања, одређена на основу (7.21), имају следећи облик

$$\begin{aligned}V_A &= \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \left(\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi + \frac{\lambda_\varphi}{\zeta} \right), \\ V_B &= \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \lambda_\zeta,\end{aligned}\tag{7.61}$$

где су $\lambda_x \equiv \text{const.}$ и $\lambda_y \equiv \text{const.}$, док ограничења у виду одређених интеграла, на основу (7.27), имају следећи облик

$$\begin{aligned}
x_f - x_0 &= \int_0^{t_f} \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \left(\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi + \frac{\lambda_\varphi}{\xi} \right) \sin \varphi dt, \\
y_f - y_0 &= - \int_0^{t_f} \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \left(\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi + \frac{\lambda_\varphi}{\xi} \right) \cos \varphi dt.
\end{aligned} \tag{7.62}$$

На основу (7.24) и (7.25), за $\lambda_0 = -1$, формираћемо основни и спрегнути систем диференцијалних једначина, који сада има следећи облик

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \left(\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi + \frac{\lambda_\varphi}{\xi} \right) \frac{1}{\xi}, \\
\dot{\xi} &= \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \lambda_\xi, \\
\dot{\lambda}_\varphi &= - \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \left(\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi + \frac{\lambda_\varphi}{\xi} \right) (\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi), \\
\dot{\lambda}_\xi &= \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \left(\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi + \frac{\lambda_\varphi}{\xi} \right) \frac{\lambda_\varphi}{\xi^2} - \frac{\omega^2 \Delta l}{\left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right]},
\end{aligned} \tag{7.63}$$

док се на основу (7.36) може изразити координата $\lambda_{\varphi 0}$ спрегнутог вектора у почетном тренутку

$$\lambda_{\varphi 0} = \xi_0 \left(\lambda_y \pm \sqrt{\frac{m}{2E_0} - \lambda_{\xi 0}^2} \right). \tag{7.64}$$

Након одређених непознатих граничних услова $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_{\xi 0}$ и t_f , одређивање коначних једначина кретања тачке A сечива своди се на квадратуру

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + \int_0^t \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \left(\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi + \frac{\lambda_\varphi}{\xi} \right) \sin \varphi dt, \\
y(t) &= y_0 - \int_0^t \left[\frac{2E_0}{m} - \omega^2 (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) \right] \left(\lambda_x \sin \varphi - \lambda_y \cos \varphi + \frac{\lambda_\varphi}{\xi} \right) \cos \varphi dt,
\end{aligned} \tag{7.65}$$

где је $t \in [0, t_f]$.

Литература

- Bryson, A. E., Ho, Y. C.: Applied Optimal Control, Hemisphere, New York, 1975.
- Fempl, S.: Elementi varijacionog računa, GraĐevinska Knjiga, Beograd, 1965.
- Leitmann, G.: The Calculus of Variations and Optimal Control, New York, Springer Science+Buisness, 1981.
- Neimark J. I., Fufaev, N. A.: Dynamics of Nonholonomic Systems, Nauka, Moscow, 1967.
- Pars, L. A.: A treatise on analutycal mechanics, London: Heinemann, 1968.
- Sumbatov, A. S.: Brachistochrone with Coulomb friction as the solution of an isoperimetrical variational problem, International Journal of Non-Linear Mechanics, 88, pp. 135-141, 2017.
- Vujanović, B. D.: Metodi optimizacije, Novi Sad, 1980.
- Zeković, D.: Brachistochronic motion of nonholonomic nonlinear mechanical system of the Chaplygin type, Mechanics Research Communications, 44, pp. 35–39, 2012.

Закључци

У овој докторској дисертацији приказано је неколико ефикасних и врло оригиналних аналитичко-нумеричких поступака који се односе на одређивање глобалног минимума времена кретања како материјалне тачке, тако и холономних и нехолономних механичких система константне и променљиве масе, са ограниченим управљањима и ограниченим реакцијама веза у општем случају, што је уједно био и главни циљ истраживања. Сагледавајући све приказане резултате ове докторске дисертације, укратко, можемо закључити да је главни циљ остварен!

У **првом поглављу** изведене су диференцијалне једначине кретања механичког система променљиве масе у коваријантном и контраваријантном облику, чије кретање ограничавају како холономне, тако и нехолономне механичке везе, за које се узима да су линеарне, нестационарне и нехомогене. Затим, доказана је потпуна еквивалентност изведених форми, са добро познатим формама диференцијалних једначина кретања у нехолономној механици. У вези са увођењем времена као допунске координате, на основу анализе спроведене у првом поглављу, показало се да се време може третирати као допунска генералисана координата једино у једначинама реономних веза и, разуме се, на сваком оном месту где се појављује као последица тих веза. Насупрот томе, време које експлицитно фигурише у функцијама везаним за механички систем, нпр. у потенцијалној енергији система, тј. време које у њих није уведено помоћу тих веза, мора и даље бити третирано као време. Имајући у виду овај феномен, који је у раду назван „проблем два времена” [Jeremić, 1998], изведене су Мацијеве, Волтерине, Вороњчеве, Чаплигинове, Генералисане Волтерине, Ферерсове, Болцман–Хамелове, Апелове и Лагранжеве једначине друге врсте са неодређеним множитељима у проширеном кофигурационом простору V_{m+1} . Нехомогене нехолономне везе и у V_{n+1} -простору остају нехомогене, а у

коэффицијентима B_i^v и B^v време t појављује се експлицитно и после увођења реономне генералисане координате q^0 .

У **другом поглављу** извршено је уопштење класичног брахистохроног проблема постављеног 1696. године од стране Јохана Бернулија. Аутор је брахистохрони проблем поставио у следећем облику: потребно је одредити облик глатке криве $y = y(x)$, која ће обезбедити да тачка, која започиње кретање из произвољног положаја $M_0(x_0, y_0)$, стигне на унапред одређену многострукост облика

$$\Psi_f(x, y) = 0,$$

за најкраће време. Брахистохрони проблем решен је као задатак оптималног управљања, користећи Понтрјагинов принцип максимума и теорију сингуларних оптималних управљања, узимањем пројекције силе реакције везе за управљачку променљиву. Затим, формиран је општи нумерички поступак за одређивање вишеструких решења одговарајућег TPBVP како за случај неограничене, тако и случај ограничене реакције везе.

У **трећем поглављу** извршено је уопштење брахистохроног проблема за случај кретања материјалне тачке у произвољном потенцијалном пољу сила у еуклидовом тродимензионалном простору E_3 . Брахистохрони проблем састојао се у одређивању оптималних управљања, као и њима одговарајућих координата стања, тако да тачка, полазећи из почетног положаја $M_0(x_0, y_0, z_0)$, пређе у крајњи положај на многострукост

$$\Psi_f(x, y, z) = 0,$$

уз неизмењену вредност механичке енергије, за минимално време.

У **четвртном поглављу** извршено је уопштење брахистохроног проблема за случај кретања холономног склерономног механичког система у произвољном пољу потенцијалних сила, узимањем генералисаних брзина за управљачке променљиве. Проблем је формулисан као задатак оптималног управљања, користећи Понтрјагинов

принцип максимума. Разматрани су различити, већ постојећи, нумеричким алгоритмима у циљу изналажења оптималних вредности параметара који утичу на тачност и брзину конвергенције решења уз дату упоредну анализу решења нумеричких алгоритама за глобалну оптимизацију, затим је развијен нови нумерички поступак.

У **петом поглављу** извршено је уопштење брахистохроног проблема за случај кретања нехолономног склерономног механичког система у произвољном пољу потенцијалних сила, узимањем квазибрзина за управљачке променљиве. Проблем је формулисан као задатак оптималног управљања, користећи Понтрјагинов принцип максимума.

У **шестом поглављу** извршено је уопштење брахистохроног проблема за случај кретања нехолономног механичког система променљиве масе у произвољном пољу потенцијалних и непотенцијалних сила са ограниченим управљањима у општем случају, где су први изводи по времену квазибрзина узети као управљачке променљиве. Проблем је формулисан као задатак оптималног управљања, користећи Понтрјагинов принцип максимума и теорију сингуларних оптималних управљања. Такође, дати су различити поступци за реализацију брахистохроног кретања.

У **седмом поглављу** проблем брахистохроног кретања нехолономног механичког система Чаплигиновог типа решен је као изопериметријски проблем. Проблем је формулисан као задатак оптималног управљања, користећи Понтрјагинов принцип максимума. Затим, показано је да се код механичког система Чаплигиновог типа може извршити снижавање реда система.

Приказ остварених научних доприноса

Остварени научни доприноси аутора, у оквиру докторске дисертације под насловом „Глобални минимум времена кретања механичких система са ограниченим управљањима и реакцијама веза“, огледају се у следећем:

- Детаљно је сакупљена, проучена и систематизована релевантна научна литература, везана за све аспекте ове дисертације.
- Изведене су диференцијалне једначине кретања механичког система променљиве масе у коваријантном облику чије кретање ограничавају холономне и нехолономне механичке везе, за које се узима да су линеарне, стационарне и нехомогене.
- Изведене су диференцијалне једначине кретања механичког система променљиве масе у коваријантном и контраваријантном облику, чије кретање ограничавају холономне и нехолономне механичке везе, за које се узима да су линеарне, нестационарне и нехомогене у проширеном конфигурационом простору V_{m+1} .
- Изведене су Мацијеве, Волтерине, Вороњчеве, Чаплигинове, Генералисане Волтерине, Ферерсове, Болцман–Хамелове, Апелове и Лагранжеве једначине друге врсте са неодређеним множитељима у проширеном конфигурационом простору V_{m+1} .
- Извршено је уопштење класичног брахистохроног проблема постављеног 1696. године од стране Јохана Бернулија како за случај неограничене, тако и случај ограничене реакције везе.
- Формирани су нови нумерички алгоритми за одређивање вишеструких решења одговарајућег TPBVP.
- Дат је општи поступак за одређивање глобалног минимума времена при брахистохроном кретању материјалне тачке у потенцијалном пољу сила.

- Дат је општи поступак за одређивање глобалног минимума времена при брахистохроном кретању холономног механичког система у потенцијалном пољу сила.
- Дат је општи поступак за одређивање глобалног минимума времена при брахистохроном кретању нехолономног механичког система у потенцијалном пољу сила.
- Дат је општи поступак за формирање TPBVP при брахистохроном кретању нехолономног механичког система променљиве масе у произвољном пољу познатих потенцијалних и непотенцијалних сила.
- Брахистохрони проблем нехолономног механичког система Чаплигиновог типа решен је као изопериметријски проблем.

Ниједан рад, па ни ова докторска дисертација, не може да претендује на свеобухватност, односно да буде затворена целина чији резултати дају дефинитивне одговоре на сва питања у оквиру разматраних теорија. Императив будућих истраживања је да се приказани аналитичко-нумерички поступци додатно побољшају, учине ефикаснијим или евентуално замене новим и савршенијим. Будућа истраживања аутора свакако ће бити усмерена на решавању тих, као и многих других питања.

Прилози

Прилог А

```
function [dsol, ierr] = ODESystemT1( t, sol )
% sol(1)  x
% sol(2)  y
% sol(3)  V
% sol(4)  fi
% sol(5)  lambda

global Popt;
global ODEPar;
% parameters of the ODE system [ tf, t1, fif, xf, lambdax ]
global Konstante;
% m, g, x0, y0, E0, V0, umax

ierr = 0;
dsol = zeros(5,1);
tf = ODEPar(1);
t1 = ODEPar(2);
fif = ODEPar(3);
xf = ODEPar(4);
lambdax = ODEPar(5);

m = Konstante(1);
g = Konstante(2);
x0 = Konstante(3);
y0 = Konstante(4);
E0 = Konstante(5);
V0 = Konstante(6);
umax = Konstante(7);
```

```

dsol(1) = -sol(3)*cos(sol(4));
dsol(2) = -sol(3)*sin(sol(4));
dsol(3) = g*sin(sol(4));
dsol(4) = -g*cos(sol(4))/sol(3);
dsol(5) = lambdax/cos(sol(4))+g*sol(5)*sin(sol(4))/sol(3);
end
%-----%
function [dsol, ierr] = ODESystemT2( t, sol )

% sol(1)    x
% sol(2)    y
% sol(3)    V
% sol(4)    fi
% sol(5)    lambdaV
% sol(6)    lambdafi
global Popt;
global ODEPar;
% parameters of the ODE system [ tf, t1, fif, xf, lambdax ]
global Konstante;
% m, g, x0, y0, E0, V0, umax

ierr = 0;
dsol = zeros(6,1);
tf = ODEPar(1);
t1 = ODEPar(2);
fif = ODEPar(3);
xf = ODEPar(4);

lambdax = ODEPar(5);
Vf=sqrt(2*(Konstante(5)/Konstante(1)-Konstante(2)*cos(xf)));
m = Konstante(1);
g = Konstante(2);
x0 = Konstante(3);
y0 = Konstante(4);
E0 = Konstante(5);
V0 = Konstante(6);

```

```

umax = Konstante(7);

dsol(1) = -sol(3)*cos(sol(4));
dsol(2) = -sol(3)*sin(sol(4));
dsol(3) = g*sin(sol(4));
dsol(4) = (umax+g*m*cos(sol(4)))/(m*sol(3));
dsol(5) = lambdax*cos(sol(4))-
(lambdax*Vf*cot(fif)+1/sin(fif))*sin(sol(4))/Vf+(umax/m+g*cos(sol(4)))*so
l(6)/sol(3)^2;
dsol(6) = -g*cos(sol(4))*sol(5)+g*sol(6)*sin(sol(4))/sol(3)-
cos(sol(4))*(lambdax*Vf*cot(fif)+1/sin(fif))*sol(3)/Vf-
lambdax*sin(sol(4))*sol(3);
end
%-----%
function funT = DistFunT( x )
%   x(1)    tf
%   x(2)    t1
%   x(3)    fif
%   x(4)    xf
%   x(5)    lambdax
global Popt;
global Konstante;
%   m, g, x0, y0, E0, V0, umax
global ODEPar;

%   parameters of the ODE system [ tf, t1, fif, xf, lambdax ]
ODEPar(1) = x(1);

ODEPar(2) = x(2);
ODEPar(3) = x(3);
ODEPar(4) = x(4);
ODEPar(5) = x(5);

Vf= sqrt(2*(Konstante(5)/Konstante(1)-Konstante(2)*cos(x(4))));
options = odeset('RelTol', 1e-12, 'AbsTol', 1e-12);
yf1 = [x(4), cos(x(4)), Vf, x(3), 0, 0];

```

```

[t,y1] = ode45( @ODESystemT2, [x(1), x(2)], yf1, options);
ylend = y1(end,:);
yf = [ylend(1), ylend(2), ylend(3), ylend(4), ylend(5)];
[t,y] = ode45( @ODESystemT1, [x(2), 0], yf, options);
yend = y(end,:);
tmp = [x(5)+x(5)*cot(x(3))*sin(x(4))+sin(x(4))/(Vf*sin(x(3))),-
(Konstante(2)*cos(ylend(4))*ylend(5)+(x(5)*Vf*cos(x(3))-
ylend(4))+cos(ylend(4)))*ylend(3)/(Vf*sin(x(3)))/(Konstante(1)*ylend(3))
,yend(1)-Konstante(3),yend(2)-
Konstante(4),ylend(6)/(Konstante(1)*ylend(3))];
funT = norm(tmp)^2;
end
%-----%
function init_Poptions()
% INIT_POPTIONS initialize options
global Popt
Popt.nSteps = 100;
% number of time steps in numerical ODE integration
Popt.ShowGraphics = [1 1 1 1 1 1 1 1];
% Indicators of graphics to present
end
%-----%
% function GMTBMP()
% drajver program
global testName;
global Popt;
global ODEPar;
global Konstante;
testName = '(unknown)';
init_Poptions();

% change here parameter values if needed
% Popt.ShowGraphics = [1 0 0 0 0 0];
% initial parameters of the ODE system [ tf, t1, fif, xf, lambdax ]
ODEPar = [0.4, 0.2, 2, 3, 0.09];
Popt.ShowGraphics = [1 0];

```



```

Popt;
%global Konstante;
% m, g, x0, y0, E0, V0, umax

Konstante(1) = 1;
Konstante(2) = 9.80665;
Konstante(3) = pi;
Konstante(4) = 2;
Konstante(5) = 30;
Konstante(6) = sqrt(2*(Konstante(5)/Konstante(1))-
Konstante(2)*Konstante(4));
Konstante(7)=12;

% options = optimset('Display','off',...
% options = optimset('Display','iter',...
options = optimset('Display','off',...
                    'TolFun',1e-12,...
                    'TolX',1e-12,...
                    'MaxFunEvals',1500);

nStart = 10000;
RezT = [];

for i=1:nStart

    tf0 = 0 + 2*rand(1);
    t10 = 0 + 2*rand(1);
    fif0 = -pi + 2*pi*rand(1);
    xf0 = 0.8 + 4.7*abs(rand(1));

    lambdax0 = -0.2194 + 2*0.2194*rand(1);
    ODEPar = [tf0, t10, fif0, xf0, lambdax0];

    fun = DistFunT( ODEPar );
    if abs(fun) < 0.5
        disp([i,fun,ODEPar]);

```

```
[x,fval] = fminsearch( @DistFunT, ODEPar, options );
if abs(fval) < 1e-12
    disp([x, fval]);
    RezT = [RezT; [x,fval]];
end
end
end
save('RezT', 'RezT');
return
%-----%
```

Прилог Б

```
%TFvec = 0.005;
% function res = OptimDiskTF( TFvec )
% OptimTF( 0.123 )      radi samo za TF = 0.123
% OptimTF( [0.01, 0.02, 0.111] )      radi za 3 vrednosti TF = 0.01,
0.02, 0.111
% OptimTF([0.010:0.001:0.150])      radi za TF od 0.010 do 0.150 sa
korakom 0.001
TFvec =[0.092:0.00025:0.094];
%   Radoslav Radulovic.
global testName;
global Popt;
global ODEPar;
global Konstante;
global TF;

% BestRez = [ TF, lx0, lfi, Dist ]
% za slucaj da postoji vec matrica BestRez ide
load('BestRezDisk')
% u suprotnom ide BestRezDisk=[];
%BestRezDisk=[];
BestRezDisk = sortrows(BestRezDisk);
for ii=1:length(TFvec)
    TF = TFvec(ii);
    %   prvo pronadji da li vec postoji TF u rezultatima
    nRecords = size(BestRezDisk,1);
    %   redovi su vec sortirani, nadji podatke za TF ili prvi manji
    %RecFound = [0, 0, 0, 0];
    RecFound = [TF, -0.0206846 + 2*0.0206846*rand(1), -
0.00292524+2*0.00292524*rand(1), 100];
    indFound = 0;
    for i=1:nRecords
        if ( abs(BestRezDisk(i,1)- TF) < 1e-8 )
            RecFound = BestRezDisk(i,:);
            indFound = i;
```

```

        break
    elseif ( BestRezDisk(i,1) < TF )
        RecFound = BestRezDisk(i,:);
    else
        break
    end
end
% kreni u u 2D optimizaciju, sa RecFound kao pocetnim podacima
OutRez = startDiskFIX( TF, RecFound );
if ( indFound > 0 )
    if OutRez(4) < BestRezDisk(indFound,4)
        % bolji rezultat za staro TF, ubelezi bolji
        BestRezDisk(indFound,:) = OutRez;
        save('BestRezDisk','BestRezDisk');
    end
else
    % dodaj novi zapis i sortiraj
    BestRezDisk = [BestRezDisk; OutRez];
    BestRezDisk = sortrows(BestRezDisk);
    save('BestRezDisk','BestRezDisk');
end
end
plot(BestRezDisk(:,1),BestRezDisk(:,4),'bo--')
%plot(BestRezDisk(76:123,1),BestRezDisk(76:123,4),'bo--')

% return
%-----%
function RecOut = startDiskFIX(tf, RecFound)
% drajver program
% Radoslav Radulovic.

global testName;
global Popt;
global ODEPar;
global Konstante;
global TF;

```

```

global Jcz;

testName = '(unknown)';
init_PoptionsDiskFIX();
% change here parameter values if needed
% Popt.ShowGraphics = [1 0 0 0 0 0];
% parameters od the ODE system [ lx0, lfi ]

ODEPar = [0, 0];

Popt.ShowGraphics = [1 0];
Popt;
% global Konstante;
% M, R, c, E0, g
Konstante(1) = 3;
Konstante(2) = 0.2;
Konstante(3) = 200;
Konstante(4) = 3500;
Konstante(5) = 9.80665;
Jcz = 0.5*Konstante(1)*Konstante(2)^2;
TF=tf;
% options = optimset('Display','off',...
% options = optimset('Display','iter',...

options = optimset('Display','off',...
                  'TolFun',1e-10,...
                  'TolX',1e-10,...
                  'MaxFunEvals',1500);

nStart = 30;
FUNMIN = zeros(1,nStart);
minimum = 1e10;
RecOut = [TF, 0, 0, 1e10];
disp(RecFound)
for i=1:nStart
    if ( i==1 )

```

```

%   podji od prethodno najboljeg ili bliskog

lx00 = RecFound(2);
lfi0 = RecFound(3);

else

lx00 = -0.0206846 + 2*0.0206846*rand(1);
lfi0 = -0.00292524+2*0.00292524*rand(1);

end

ODEPar = [lx00, lfi0];

while 1

lx00 = -0.0206846 + 2*0.0206846*rand(1);
lfi0 = -0.00292524+2*0.00292524*rand(1);

ODEPar = [lx00, lfi0];

fun = DistFunDiskFIX( ODEPar );
if ( fun < minimum + 1.0)
    break
end
end
[x,fval] = fminsearch( @DistFunDiskFIX, ODEPar, options );
FUN(i) = fval;
if ( fval < minimum )
    minimum = fval;
    RecOut = [TF, x(1), x(2), fval];
    disp(RecOut);
end
end

FUNMIN = min(FUN);
disp([TF,FUNMIN])

```

```

end
%-----%
function [dsol, ierr] = ODESystemDiskFIX( t, sol )
%
% sol(1)   x
% sol(2)   y
% sol(3)   fi
% sol(4)   lx
% sol(5)   ly

global Popt;

global ODEPar;
% parameters od the ODE system [ lx0, lfi ]

global Konstante;
% M, R, c, E0, g

global Jcz;

global TF;

ierr = 0;
dsol = zeros(5,1);

lx0 = ODEPar(1);
lfi = ODEPar(2);

M = Konstante(1);
R = Konstante(2);
c = Konstante(3);
E0 = Konstante(4);
g = Konstante(5);

dsol(1) = 2*sol(4)*(E0+g*M*sol(2)-0.5*c*(sqrt(sol(1)^2+sol(2)^2)-R)^2)/M;

```

```

dsol(2) = 2*sol(5)*(E0+g*M*sol(2)-0.5*c*(sqrt(sol(1)^2+sol(2)^2)-R)^2)/M;
dsol(3) = 2*lfi*(E0+g*M*sol(2)-0.5*c*(sqrt(sol(1)^2+sol(2)^2)-R)^2)/Jcz;
dsol(4) = (0.5*c*sol(1)*(sqrt(sol(1)^2+sol(2)^2)-
R))/(sqrt(sol(1)^2+sol(2)^2)*(E0+g*M*sol(2)-
0.5*c*(sqrt(sol(1)^2+sol(2)^2)-R)^2));
dsol(5) = -((g*M-(c*sol(2)*(sqrt(sol(1)^2+sol(2)^2)-
R))/sqrt(sol(1)^2+sol(2)^2))/(2*(E0+g*M*sol(2)-
0.5*c*(sqrt(sol(1)^2+sol(2)^2)-R)^2)));

end
%-----%
function fun = DistFunDiskFIX( x )

%   x(1)   lx0
%   x(2)   lfi

global Popt;

global Konstante;
%   M, R, c, E0, g

global Jcz;

global ODEPar;
%   parameters od the ODE system [ lx0, lfi ]

ODEPar(1) = x(1);
ODEPar(2) = x(2);
global TF;

%   spreći velike vrednosti za lx, ly
if ( abs(x(1)) > 0.0206846 || abs(x(2)) > 0.00292524 )
    fun = 1000;
    return
end

```



```

%   integrali sistem

y0 = [0, Konstante(2), 0, x(1),
sqrt(Konstante(1)/(2*(Konstante(4)+Konstante(5)*Konstante(1)*Konstante(2)
))-x(1)^2-Konstante(1)*x(2)^2/Jcz)  ];

options = odeset('RelTol', 1e-8, 'AbsTol', 1e-10);

[t,y] = ode45( @ODESystemDiskFIX, [0, TF], y0, options);

yend = y(end,:);

tmp = [ yend(4)+yend(5)*cos(yend(1)), yend(2)-5-sin(yend(1)), yend(3)-
2*pi];
fun = norm (tmp)^2;

end
%-----%
function init_PoptionsDiskFIX()
%   INIT_POPTIONS   initialize options

global Popt

Popt.nSteps = 100;
%   number of time steps in numerical ODE integration

Popt.ShowGraphics = [1 1 1 1 1 1];
%   Indicators of graphics to present

end
%-----%

```

Биографија

Аутор је рођен 24. маја 1986. године у Пећи. Након завршене основне и средње школе у Београду, на Машинском факултету Универзитета у Београду завршио је основне академске студије. На истом факултету завршио је и дипломске академске (мастер) студије на модулу за Ваздухопловство са просечном оценом 10,00. Као један од најбољих студената Машинског факултета добијао је Похвале током студија поводом Дана Машинског факултета за изванредан успех. Такође, био је стипендиста Фонда за младе таленте Републике Србије „*Доситеја*”, као и стипендиста Фондације Републике Србије за младе таленте.

Из предмета Катедре за механику на основним и дипломским академским студијама, имао је следеће оцене: Механика 1–10, Механика 2–10, Механика 3–10 и Механика М–10. Аутор је 2011. године уписао докторске академске студије на Машинском факултету Универзитета у Београду. Положио је све испите предвиђене Програмом усавршавања са просечном оценом 10,00. Аутор је такође положио и шест допунских испита из групе предмета Катедре за механику са просечном оценом 10,00. На међународном конгресу Српског друштва за механику који је одржан у Врњачкој Бањи 2013. године аутор је награђен престижном наградом „*Растко Стојановић*“ која се додељује младим истраживачима за самостално објављен и изложен научни рад [Radulović, 2013.a]. Од 24. маја 2012. године аутор је запослен као асистент на Машинском факултету Универзитета у Београду на Катедри за механику.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани Радослав Радуловић

број индекса Д40/11

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

**Глобални минимум времена кретања механичких система са ограниченим
управљањима и реакцијама веза**

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена докторска дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, _____

Радослав Д. Радуловић, дипл. инж. маш. –мастер

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Радослав Радуловић

Број индекса Д40/11

Студијски програм Докторске академске студије

Наслов рада Глобални минимум времена кретања механичких система са
ограниченим управљањима и реакцијама веза

Ментори др Драгомир Зековић, редовни професор и
др Александар Обрадовић, редовни професор

Потписани Радослав Радуловић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на порталу **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, _____

Радослав Д. Радуловић, дипл. инж. маш. –мастер

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Глобални минимум времена кретања механичких система са ограниченим управљањима и реакцијама веза

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство

2. Ауторство – некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прерада

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прерада

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.

Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

Потпис докторанда

У Београду, _____

Радослав Д. Радуловић, дипл. инж. маш. –мастер

1. **Ауторство.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.